NTNU | Norwegian University of Science and Technology

TMA4105 MATEMATIKK 2

Oversiktsforelesning 8
Multiple integraler III

Vår 2024

Nøkkelbegreper

- Variabelskifte for trippelintegraler
  - sylinderkoordinater og kulekoordinater
  - gjennom alminnelige transformasjoner (Jacobi-matrise, Jacobi-determinant)
- Massesenter

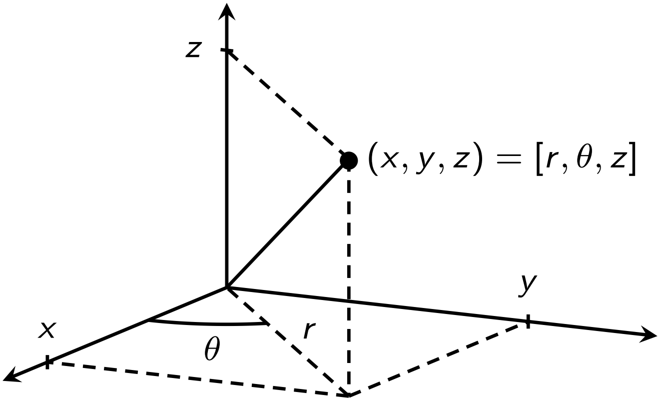
Eksempel

Regn ut

$$I = \iiint_D 2y^2 z \, dV,$$

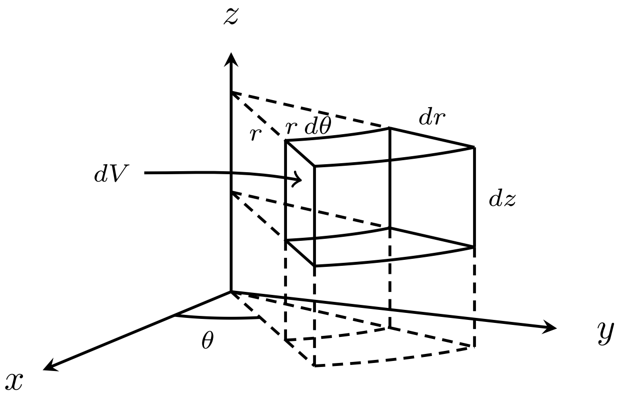
der D ligger over xy-planet og innenfor $x^2 + y^2 = 1$ og $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Sylinderkoordinater



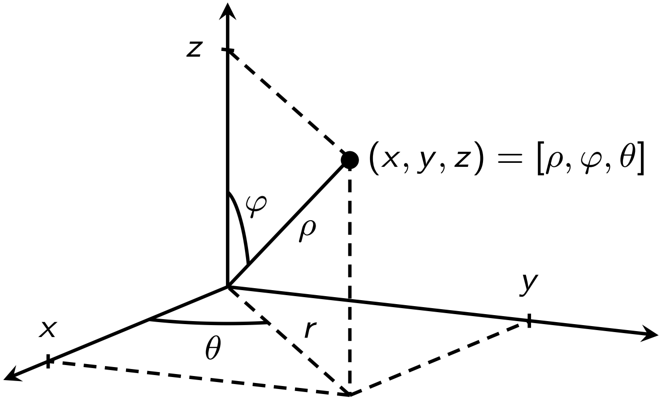
$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z$$

Volumelement i sylinderkoordinater



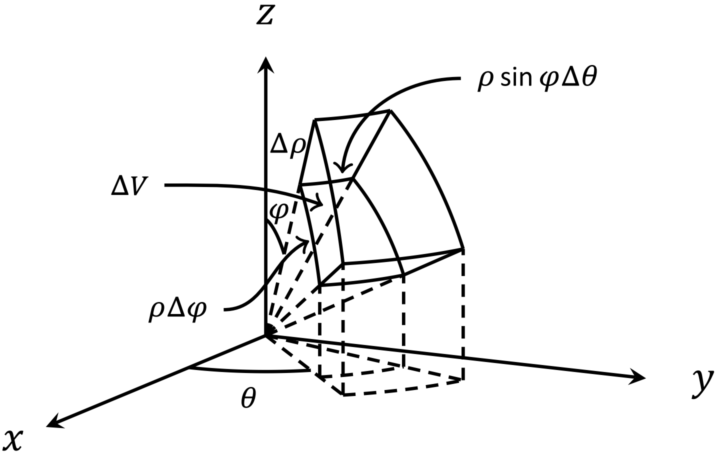
$$dV = r\,dz\,dr\,d\theta$$

Kulekoordinater



$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta \qquad y = \rho \sin\varphi \sin\theta \qquad z = \rho \cos\varphi$$

Volumelement i kulekoordinater



$$dV = \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

Variabelbytte i trippelintegral

La T være en én-entydig transformasjon fra et område S i uvw-rommet til et område D i xyz-rommet, gitt ved

$$T(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) .$$

Anta at $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$ og $z(u,v,w)$ og deres 1. ordens partiellderiverte er kontinuerlige på S. Hvis $f(x,y,z)$ er integrerbar på D, og

$$g(u,v,w) = (f \circ T)(u,v,w) = f\left(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right)$$

så er

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S g(u,v,w)\,|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw,$$

der Jacobi-determinanten er

$$J(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} .$$

Masse og massesenter

Massen av et romlig legeme T med **massetetthetsfunksjon** $\delta = \delta(x, y, z)$ er gitt ved

$$m = \iiint_T dm = \iiint_T \delta(x, y, z)\, dV, \qquad dm = \delta dV.$$

Massesenteret til T er punktet $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ i $\mathbb{R}^3$, hvor

$$\overline{x} = \frac{1}{m} \iiint_T x\, dm, \qquad \overline{y} = \frac{1}{m} \iiint_T y\, dm, \qquad \overline{z} = \frac{1}{m} \iiint_T z\, dm.$$

Dersom $\delta(x, y, z) = 1$, så kalles punktet $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ **sentroiden** til T.

Eksempel

Finn massesenteret til området begrenset av

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{og} \quad 0 \leq z \leq 2,$$

der massetettheten $\delta(x, y, z)$ er proporsjonal med avstanden til origo.

Figurer i math3d.org

- Eksempel sylinderkoordinater: `https://www.math3d.org/BQSUJbs8o`
- Flater gitt i sylinderkoordinater: `https://www.math3d.org/kLP35Jfrm`
- Kulekoordinater: `https://www.math3d.org/Wu3Fflfup`
- Flater gitt i kulekoordinater: `https://www.math3d.org/RxEvHvMBc`