NTNU | Norwegian University of Science and Technology

TMA4105 MATEMATIKK 2

Oversiktsforelesning 7
Multiple integraler II

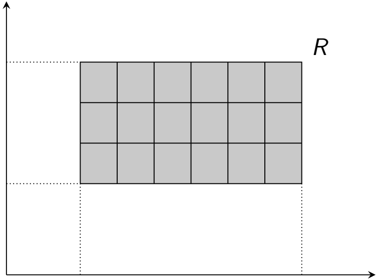
Vår 2024

Nøkkelbegreper

- Variabelskifte for dobbeltintegraler
  - Dobbeltintegraler i polarkoordinater
  - Jacobi-determinanten
- Trippelintegraler

Forrige uke: Riemann-summer for dobbeltintegraler

For en partisjon P av rektangelet $R = [a, b] \times [c, d]$ er $\Delta A_{ij} = \text{areal}(R_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j$.



$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A_{ij} = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dydx.$$

Eksempel

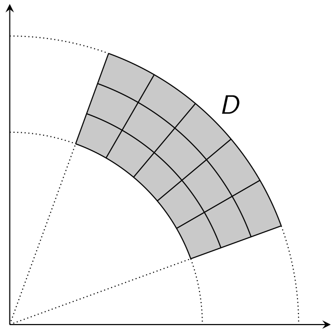
Regn ut

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-y}^{y} \ln\left(1 + x^2 + y^2\right)\, dxdy + \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \ln\left(1 + x^2 + y^2\right)\, dxdy$$

Nå: Riemann-summer for polarkoordinater

For en av partisjon P av $D = [\varrho_1, \varrho_2] \times [\alpha, \beta]$ i polarkoordinater er

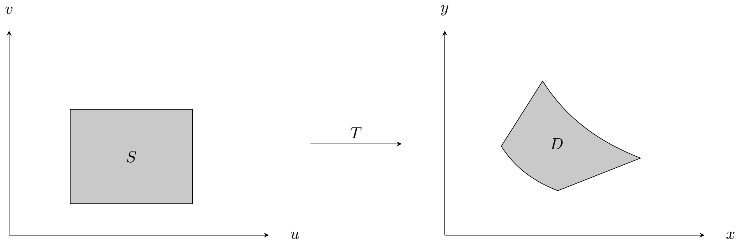
$$\Delta A_{ij} = \text{areal}(D_{ij}) = \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \Delta r_i \Delta \theta_j .$$



$$\iint_D f(x,y)\, dA = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left(r_{ij}^* \cos \theta_{ij}^*, r_{ij}^* \sin \theta_{ij}^*\right) \Delta A_{ij} = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r dr d\theta .$$

Variabelskifte for dobbeltintegraler

La $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ være en én-entydig koordinattransformasjon fra området S i uv-planet til området D i xy-planet.



Anta at $x(u,v)$ og $y(u,v)$ og deres første ordens partiellderiverte med hensyn på u og v er kontinuerlige på S. Hvis $f(x,y)$ er integrerbar på D og

$$g(u,v) = (f \circ T)(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$$

så er g integrerbar på S og

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_S g(u,v)|J(u,v)|\,dudv \qquad \text{der} \qquad J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Eksempel

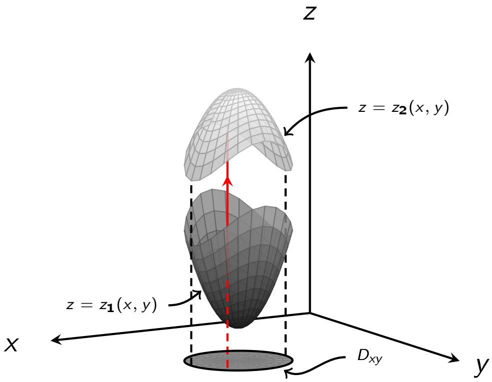
Regn ut

$$\iint_D \frac{x}{y}\, dxdy,$$

der D er avgrenset av $xy \geq 0$ og kurvene

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{4}{x}, \quad y = \frac{1}{3}x \quad \text{og} \quad y = 3x.$$

Trippelintegraler



$$\iiint_D f(x, y, z)\, dV = \iint_{D_{xy}} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dzdydx.$$

Figurer i math3d.org

- Eksempel: Volum avgrenset av $z = 3x^2 + y^2$ og $z = 4 - x^2 - 3y^2$:
  https://www.math3d.org/MEslDUsAy
- Eksempel: Volum avgrenset av $z = 1$, $z = x - 1$ og $x = y^2$:
  https://www.math3d.org/dP2VNHSul
- Eksempel: Bytte av integrasjonsgrenser:
  https://www.math3d.org/UpnXhCCpU