NTNU | Kunnskap for en bedre verden

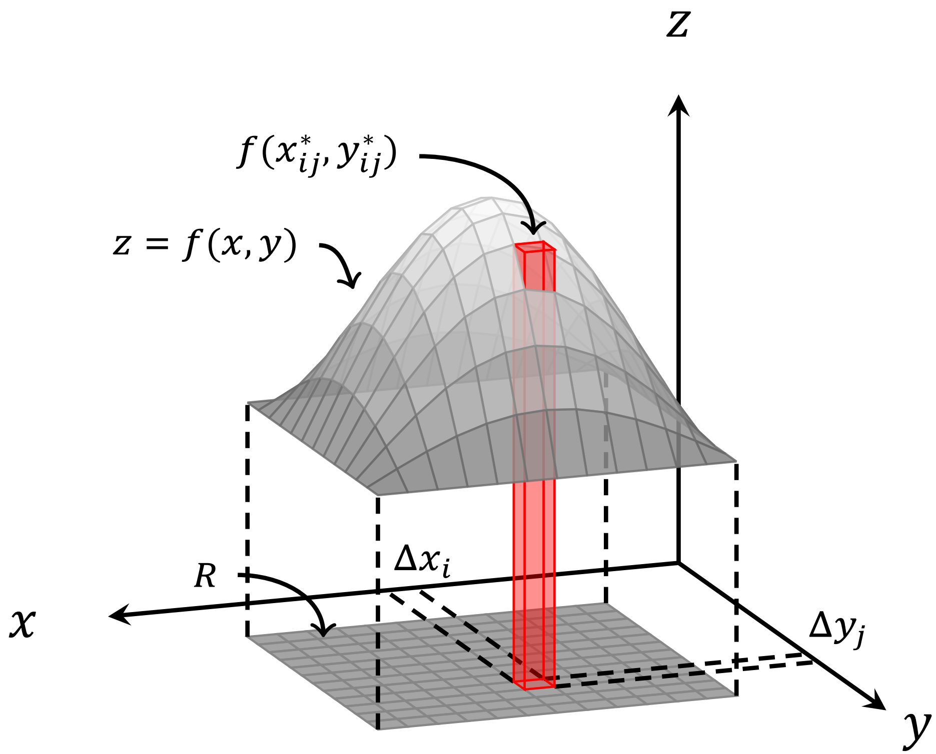
TMA4105 Matematikk 2 – våren 2024

Oversiktsforelesning 6

Nøkkelbegreper uke 7

- Dobbeltintegraler
  - Riemannsummer
  - Egenskaper til dobbeltintegraler
- Enkle (x-enkle, y-enkle) integrasjonsområder
- Itererte integraler
- Bytte av integrasjonsrekkefølge
- Uegentlige integraler for funksjoner med konstant fortegn
- Middelverdier for funksjoner av flere variabler

Riemannsummer i to variabler

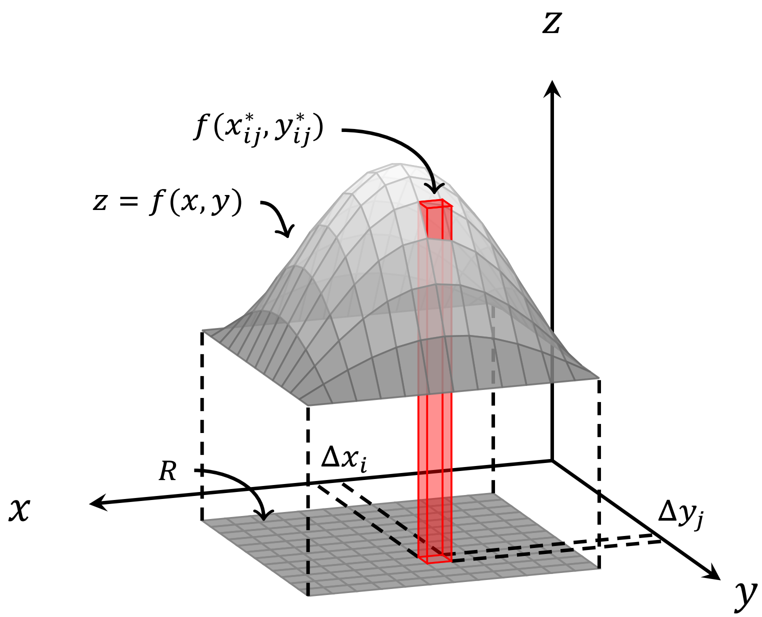


$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x^*_{ij}, y^*_{ij}) \Delta A_{ij}$$

Dobbeltintegral

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{\|P\|\to 0} R(f,P)$$

$$= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A_{ij}$$



Egenskaper til dobbeltintegraler

La $f(x,y)$ og $g(x,y)$ være to funksjoner som er integrerbare over et område D, og la L og M være to konstanter. Da gjelder:

(a) $\iint_D f(x,y)\,dA = 0$, hvis D har areal lik 0.

(b) $\iint_D dA = \text{areal}(D)$.

(c) Dersom $f(x,y) \geq 0$ på D så er $\iint_D f(x,y)\,dA = V \geq 0$ der V er volumet til legemet som ligger under $z = f(x,y)$ og over D.

(d) $\iint_D \big(Lf(x,y) + Mg(x,y)\big)\,dA = L\iint_D f(x,y)\,dA + M\iint_D g(x,y)\,dA$.

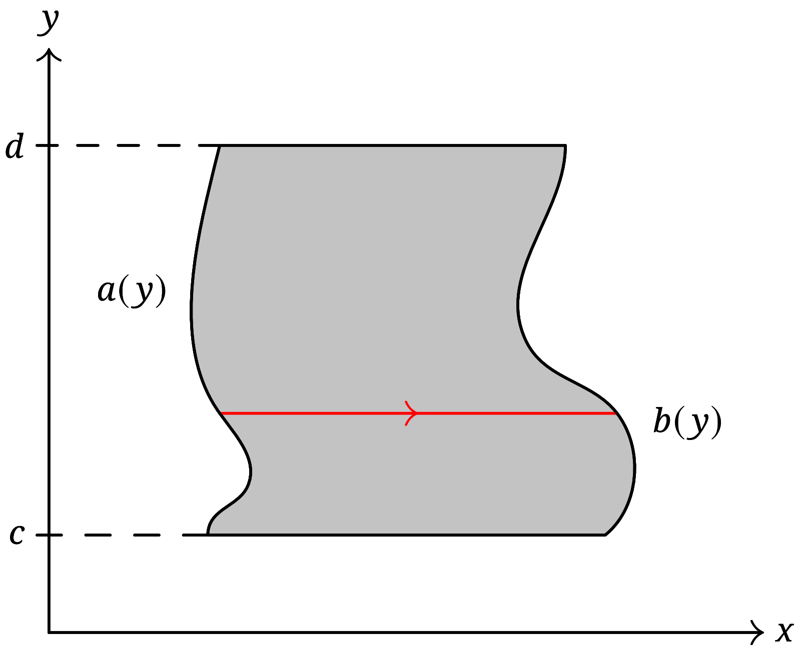
(e) Dersom $f(x,y) \leq g(x,y)$ på D så er $\iint_D f(x,y)\,dA \leq \iint_D g(x,y)\,dA$.

(f) $|\iint_D f(x,y)\,dA| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dA$.

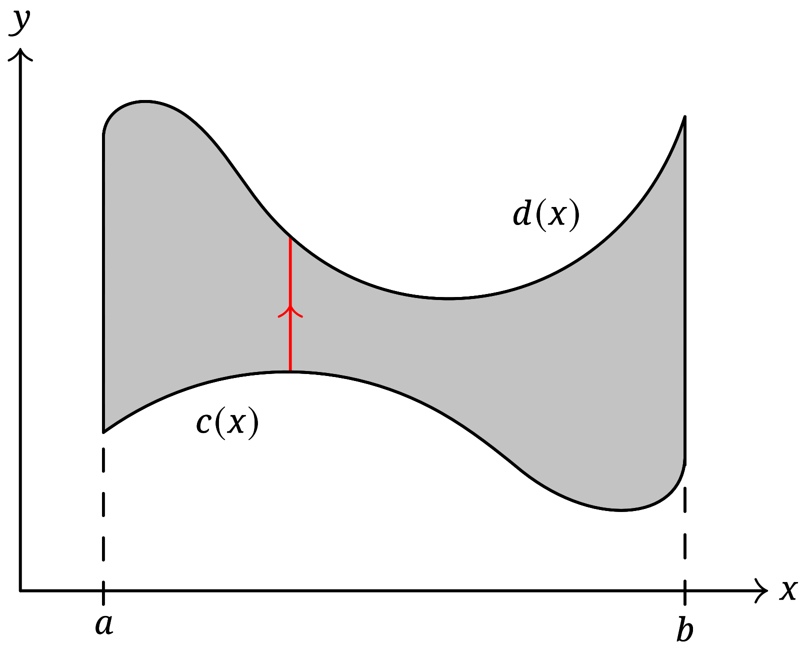
(g) Dersom $D_1, D_2, \dots, D_k$ er ikke-overlappende områder der f er integrerbar på hver av dem, så er f integrerbar på unionen $D = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_k$ og

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \sum_{j=1}^{k} \iint_{D_j} f(x,y)\,dA.$$

x- og y-enkle områder



x-enkelt område i $\mathbb{R}^2$



y-enkelt område i $\mathbb{R}^2$

Teorem 15.2: Itererte integraler

La $f(x,y)$ være en funksjon som er kontinuerlig på $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

(1) Anta at D er x-enkelt. Da er f integrerbar over D og

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

(2) Anta at D er y-enkelt. Da er f integrerbar over D og

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Teorem 15.3: Middelverditeoremet for dobbeltintegraler

Anta at $f(x,y)$ er kontinuerlig på et lukket, begrenset og sammenhengende område D i $\mathbb{R}^2$. Da finnes det et punkt $(x_0, y_0) \in D$ slik at

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{\text{areal}(D)} \iint_D f(x,y)\,dA$$

der

$$\text{areal}(D) = \iint_D dA.$$