NTNU | Kunnskap for en bedre verden

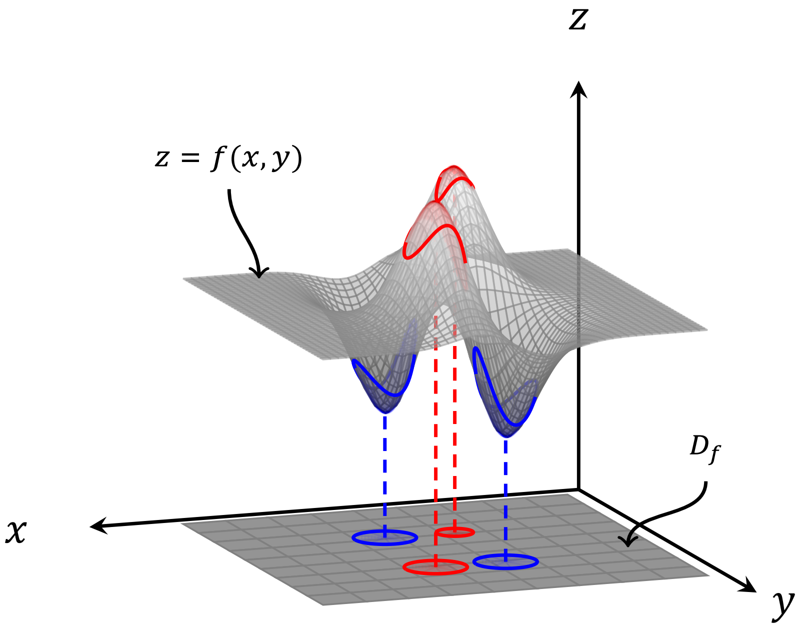
TMA4105 Matematikk 2 – våren 2024

Oversiktsforelesning 5

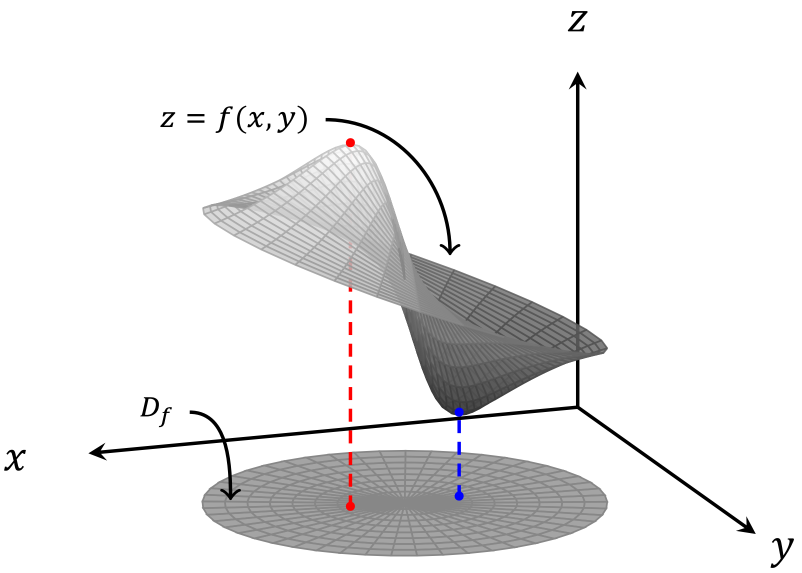
Nøkkelbegreper uke 6

- Lokale maksimums- og minimumspunkter for funksjoner av flere variabler
- Sadelpunkter for funksjoner av flere variabler
- Kritiske punkter for funksjoner av flere variabler
- Singulære punkter for funksjoner av flere variabler
- Nødvendige betingelser for ekstremalverdier
- Ekstremalverdisetningen
- Annenderiverttesten i to variabler
- Lagranges multiplikatormetode

Ekstremalverdier



Lokale ekstremalverdier



Globale ekstremalverdier

Annenderiverttesten (i $\mathbb{R}^2$)

La $f(x, y)$ være en funksjon av to variabler og la $(a, b) \in D_f$ være et kritisk punkt som også er et indre punkt i D_f. Anta at alle de annenordens partiellderiverte eksisterer og er kontinuerlige i en omegn om (a, b).

La

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$$

og la

$$\Delta = AC - B^2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}.$$

Da gjelder:

- Dersom $\Delta < 0$, så er (a, b) et sadelpunkt.
- Dersom $\Delta > 0$ og $A > 0$, så er (a, b) et lokalt minimumspunkt.
- Dersom $\Delta > 0$ og $A < 0$, så er (a, b) et lokalt maksimumspunkt.

(Dersom $\Delta = 0$ kan vi ikke si noe.)

Lagranges multiplikatormetode med én bibetingelse

La $\mathscr{C}$ være kurven definert av ligningen $g(x,y) = 0$ og anta at (a,b) er et lokalt ekstremalpunkt for funksjonen $f(x,y)$ langs $\mathscr{C}$. Dersom

- f og g begge har kontinuerlige partiellderiverte i en omegn av (a,b),
- (a,b) ikke er et av endepunktene til $\mathscr{C}$, og
- $\nabla g(a,b) \neq \mathbf{0} = (0,0)$,

så finnes det en $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at

$$\nabla f(a,b) = \lambda \nabla g(a,b).$$