NTNU | Kunnskap for en bedre verden

TMA4105 Matematikk 2 – våren 2024

Oversiktsforelesning 4

Nøkkelbegreper uke 5

- Kjerneregel for funksjoner av flere variabler
- Lineær approksimasjon
- Deriverbarhet for funksjoner av flere variabler
- Gradient og retningsderivert
- Implisitt funksjonsteorem

Kjerneregler for funksjoner av flere variabler

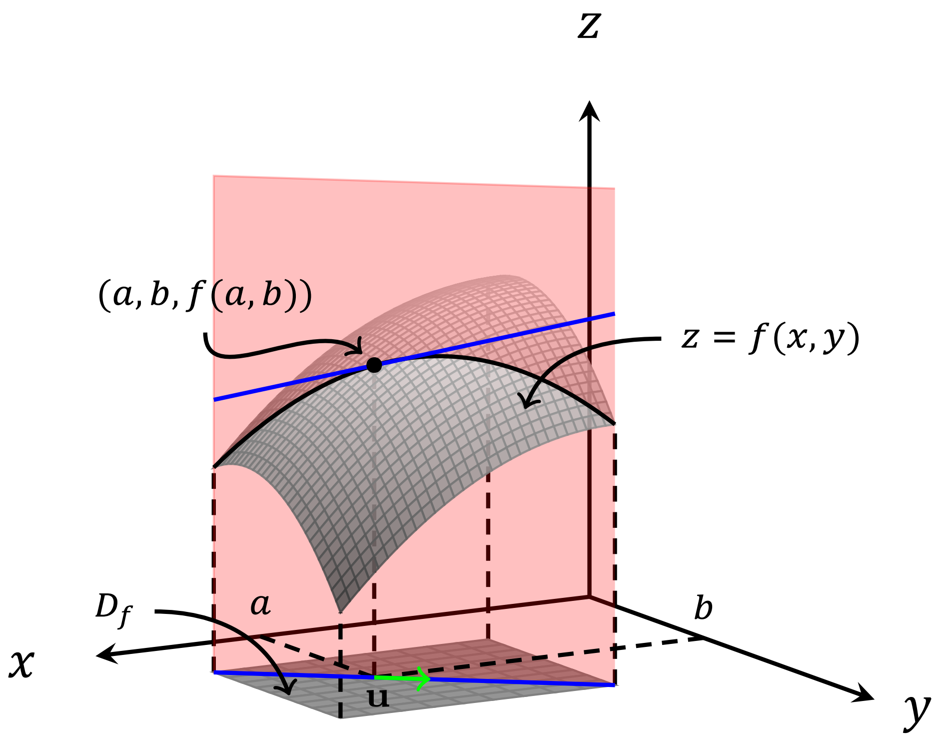
Dersom z er en funksjon av x og y med kontinuerlig første ordens partiellderiverte, og x og y er deriverbare funksjoner av t, så er

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Dersom z er en funksjon av x og y, og x og y er funksjoner av r og s, alle med kontinuerlig første ordens partiellderiverte, så er

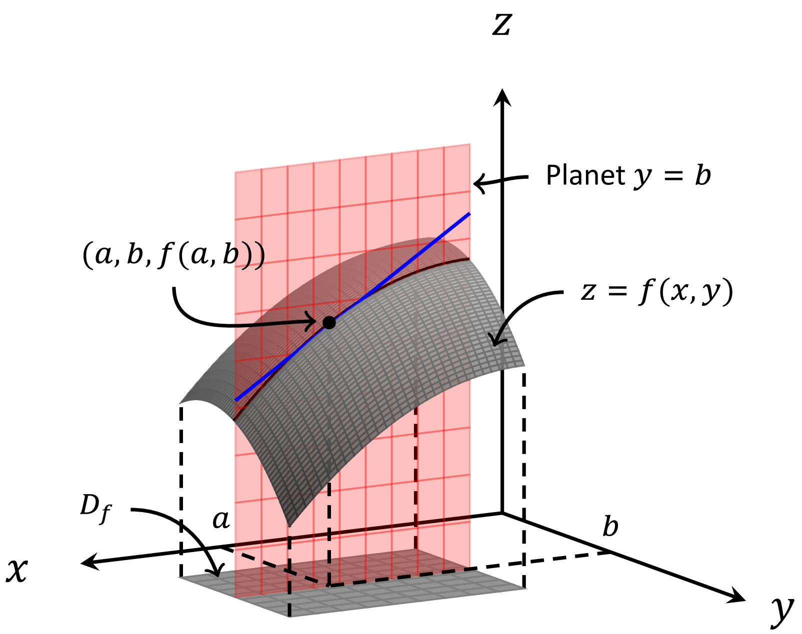
$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\
\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.
\end{aligned}$$

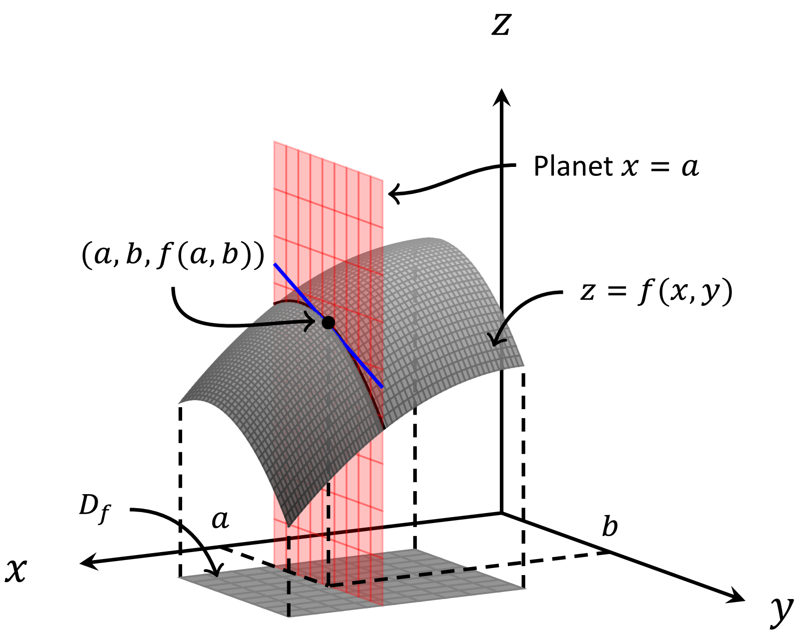
Retningsderivert



$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

Partiellderivasjon





$$D_{\mathbf{i}} f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a,b)}{h}$$

$$D_{\mathbf{j}} f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a,b)}{h}$$

Implisitt funksjonsteorem i $\mathbb{R}^2$

Anta at $f : D \to \mathbb{R}$, der $D \subseteq \mathbb{R}^2$, har kontinuerlig første ordens partiellderiverte. La (a, b) være et indre punkt i D slik at

$$f(a, b) = 0 \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0.$$

Da finnes det en omegn I om a i $\mathbb{R}$ og en deriverbar funksjon $g : I \to \mathbb{R}$ slik at

$$g(a) = b \qquad \text{og} \qquad f(x, g(x)) = 0 \quad \text{for } x \in I.$$

Vi har

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}.$$

Implisitt funksjonsteorem i $\mathbb{R}^{n+1}$

Anta at $f : D \to \mathbb{R}$, der $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, har kontinuerlig første ordens partiellderiverte. La $(\mathbf{a}, b) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, b)$ være et indre punkt i D slik at

$$f(\mathbf{a}, b) = 0 \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(\mathbf{a}, b) \neq 0.$$

Da finnes det en omegn B om $\mathbf{a}$ i $\mathbb{R}^n$ og en deriverbar funksjon $g\colon B \to \mathbb{R}$ slik at

$$g(\mathbf{a}) = b \qquad \text{og} \qquad f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0 \quad \text{for } \mathbf{x} \in B.$$

Vi har

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}{\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}.$$