NTNU | Kunnskap for en bedre verden

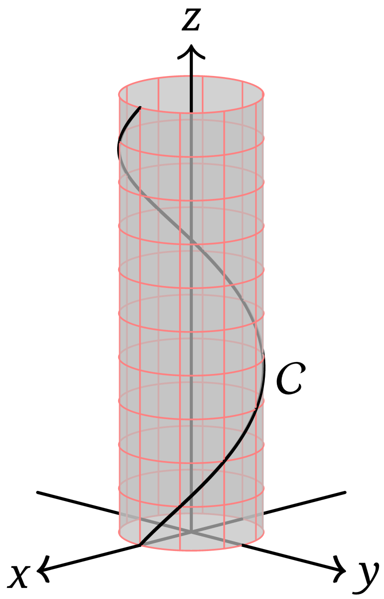
TMA4105 Matematikk 2 – våren 2024

Oversiktsforelesning 2

Nøkkelbegreper uke 3

- Vektorvaluerte funksjoner av én variabel
  - Deriverbarhet
  - Derivasjonsregler: produktregler og kjerneregelen
- Kurver gitt ved vektorvaluert funksjon
  - Glatte kurver
  - Enhetstangentvektor og enhetsnormalvektor
  - Buelengde
  - Krumning

Vektorvaluerte funksjoner



$$\mathbf{r}(t) = \big(\cos(t), \sin(t), t\big), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

https://s.ntnu.no/kurve

Teorem 12.1: Regneregler for derivasjon

La $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være to deriverbare vektorvaluerte funksjoner, og la λ være en deriverbar skalarfunksjon. Da gjelder:

(a) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$

(b) $\dfrac{d}{dt}(\lambda(t)\mathbf{u}(t)) = \lambda'(t)\mathbf{u}(t) + \lambda(t)\mathbf{u}'(t)$

(c) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$

(d) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$ (gjelder bare for $\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^3$)

(e) $\dfrac{d}{dt}\mathbf{u}(\lambda(t)) = \lambda'(t)\mathbf{u}'(\lambda(t))$

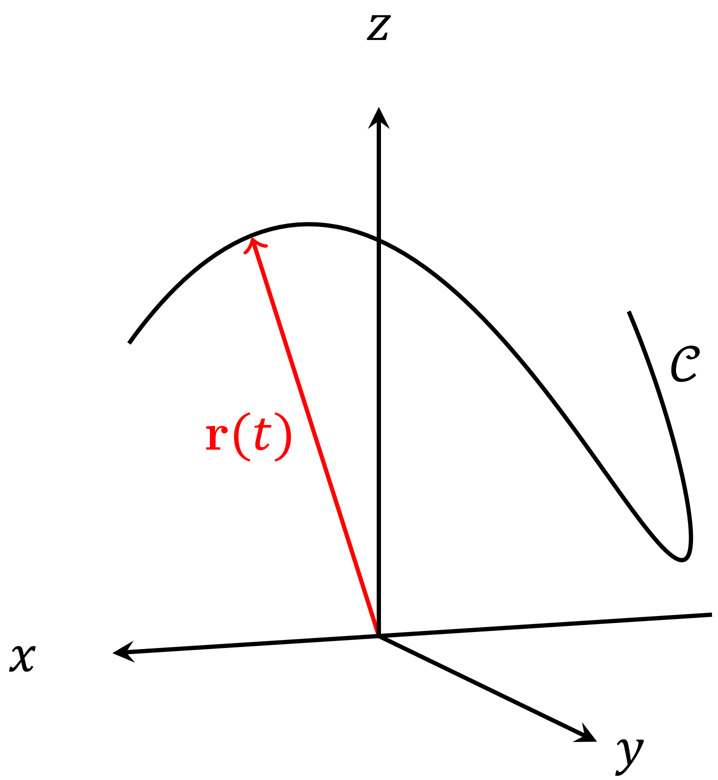
(f) for alle punkter der $\mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}$, så er $\dfrac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)| = \dfrac{\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}'(t)}{|\mathbf{u}(t)|}$.

Buelengde

La kurven C være gitt ved parametriseringen $\mathbf{r}(t)$, der $t \in [a, b]$.

Buelengden er så gitt ved

$$s = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt.$$



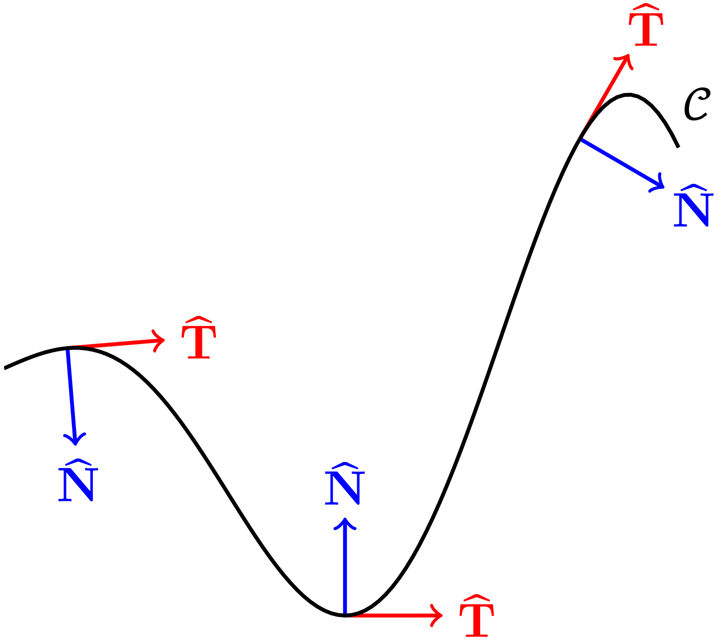
Krumning og enhetsnormal

Gitt en glatt parametrisering $\mathbf{r}(t)$ av en kurve C, så er krumningen gitt ved

$$\kappa = \left|\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\right| = \frac{1}{|\mathbf{v}(t)|}\left|\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt}\right|.$$

Dersom $\kappa \neq 0$, så er enhetsnormalen gitt ved

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{1}{\kappa(s)}\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = \frac{d\hat{\mathbf{T}}/\,dt}{|\,d\hat{\mathbf{T}}/\,dt|}.$$



Dekomponering av akselerasjon

Akselerasjonen $\mathbf{a}$ kan uttrykkes som

$$\mathbf{a} = a_T \hat{\mathbf{T}} + a_N \hat{\mathbf{N}}$$

der

$$a_T = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d}{dt}|\mathbf{v}(t)| \qquad \text{(tangentkomponenten)}$$

$$a_N = \kappa \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \kappa |\mathbf{v}(t)|^2 \qquad \text{(normalkomponenten).}$$

Krumning for kurver i $\mathbb{R}^3$

Gitt en glatt parametrisering $\mathbf{r}(t)$ av en kurve C i $\mathbb{R}^3$, så er krumningen gitt ved

$$\kappa(t) = \frac{|(\mathbf{v} \times \mathbf{a})(t)|}{|\mathbf{v}(t)|^3}$$

der

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) \qquad \text{(hastigheten)}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t) \qquad \text{(akselerasjonen).}$$

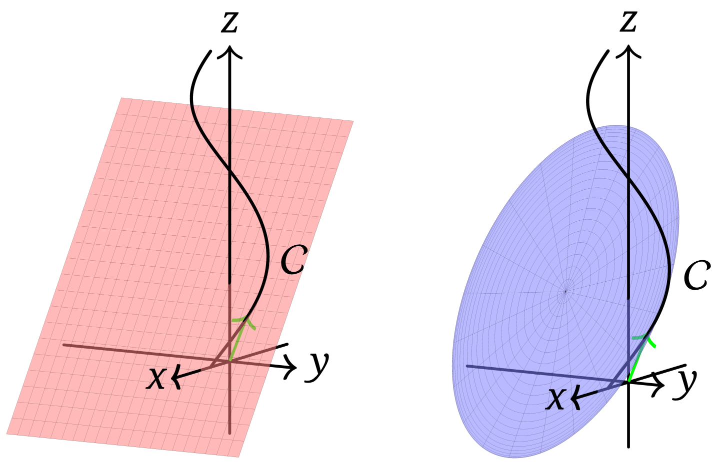
Smygplan

Gitt en glatt parametrisering $\mathbf{r}(t)$ av en kurve C i $\mathbb{R}^3$, så er **smygplanet** til C i punktet $\mathbf{r}(t)$ planet som er

- spent ut av $\hat{\mathbf{T}}$ og $\hat{\mathbf{N}}$,
- går gjennom $\mathbf{r}(t)$, og som
- står normalt på $\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{T}} \times \hat{\mathbf{N}}$.

Smygsirkelen i $\mathbf{r}(t)$ er sirkelen som

- skjærer kurven i dette punktet, og som
- har samme $\hat{\mathbf{T}}$, $\hat{\mathbf{N}}$ og κ.



https://s.ntnu.no/smygplan