



NTNU

Norwegian University of
Science and Technology

TMA4105 MATEMATIKK 2

Oversiktsforelesning 13
Stokes' teorem

Vår 2024

Stokes' teorem

Spørsmål?



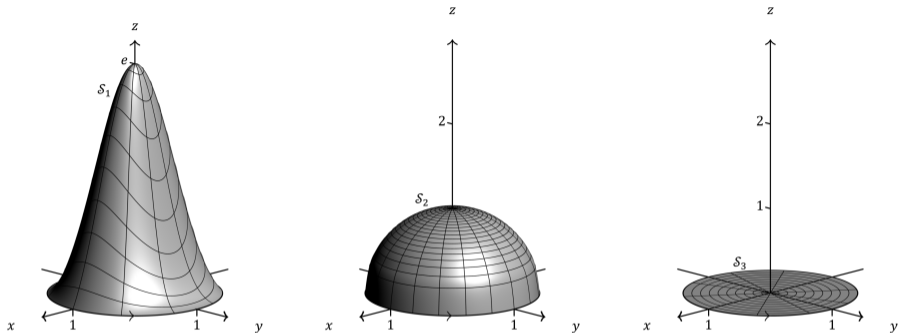
Stokes' teorem

La \mathcal{S} være en stykkevis glatt, orientert flate i \mathbb{R}^3 med enhetsnormal $\hat{\mathbf{N}}$, der randen $\mathcal{C} = \partial\mathcal{S}$ til \mathcal{S} består av en eller flere stykkevis glatte, lukkede kurver hvis orientering er bestemt av orienteringen til \mathcal{S} .

Hvis \mathbf{F} er et glatt vektorfelt definert på en åpen mengde som inneholder \mathcal{S} , så er

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \text{curl } \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS.$$

Områder med samme rand



$$\oint_{\partial S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial S_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\iint_{S_1} \text{curl } \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iint_{S_2} \text{curl } \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iint_{S_3} \text{curl } \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

Eksempel 1

En orientert kurve \mathcal{C} er gitt ved parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, 1 + \sin t, 1 - \cos t - \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- (a) Vis at \mathcal{C} ligger i et plan og finn en ligning for dette planet. Hva slags kurve er projeksjonen av \mathcal{C} i xy -planet?
- (b) Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der $\mathbf{F}(x, y, z) = (ye^x, x^2 + e^x, z^2 e^z)$ for $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Eksempel 2

La

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(-\sqrt{x^3 + 1} \cdot \cos z - x^2 y - \frac{1}{3} y^3 - 2y, x - e^y \sin z, 0 \right), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

og la S være flaten gitt ved grafen til

$$z = (1 - x^2 - y^2)e^{1-x^2-3y^2}, \quad z \geq 0.$$

Regn ut

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS,$$

der $\hat{\mathbf{N}}$ har positiv z -komponent.

Repetisjon neste uke



Figur i math3d.org

- Første eksempel: <https://www.math3d.org/vWjofaEt7>
- Andre eksempel: <https://www.math3d.org/DSVniKFNp>