NTNU | Norwegian University of Science and Technology

TMA4105 MATEMATIKK 2

Oversiktsforelesning 12
Divergensteoremet

Vår 2024

Nøkkelbegreper

Divergensteoremet

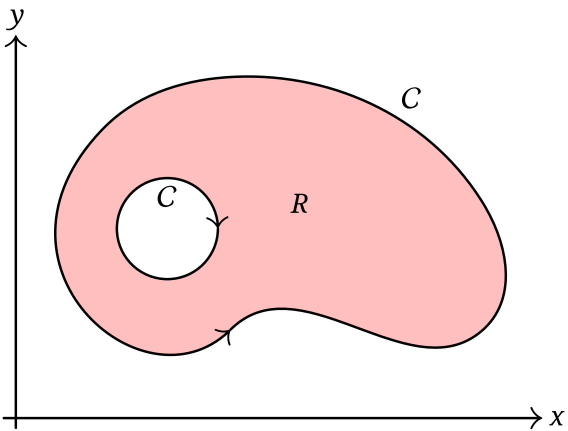
Spørsmål?

Greens teorem

La R være et regulært, lukket område i xy-planet hvis rand, $\mathcal{C} = \partial R$, består av en eller flere stykkevis glatte, enkle lukkede kurver som er positivt orientert med hensyn på R.

Hvis $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ er et glatt vektorfelt definert på R, så er

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

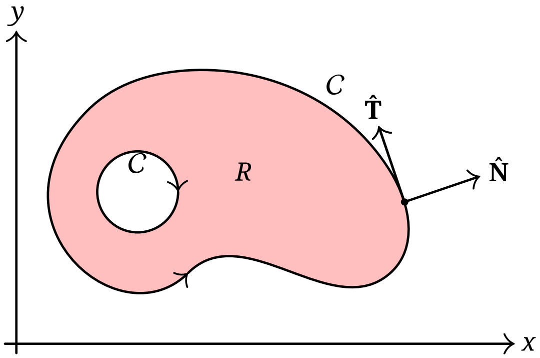


Divergensteoremet i planet

La R være et regulært, lukket område i xy-planet hvis rand, $\mathcal{C} = \partial R$, består av en eller flere stykkevis glatte, enkle lukkede kurver som er positivt orientert med hensyn på R.

Hvis $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ er et glatt vektorfelt definert på R, så er

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, ds = \iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA.$$



Regulære områder i rommet

Et område D i $\mathbb{R}^3$ er **z-enkelt** hvis det er avgrenset av en stykkevis glatt flate $\mathcal{S}$, og hvis hver rette linje (parallell med z-aksen) gjennom et indre punkt i D skjærer $\mathcal{S}$ nøyaktig to ganger. På tilsvarende vis definerer vi begrepene x-enkelt og y-enkelt.

Vi sier at D er **regulært** hvis det kan deles opp i endelig mange områder som hver for seg er både x-, y- og z-enkle.

Divergensteoremet

La $D \subseteq \mathbb{R}^3$ være et regulært område med rand $\mathcal{S} = \partial D$. Anta at $\mathcal{S}$ er en orientert og lukket flate, der enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ peker ut av D.

Dersom $\mathbf{F}$ er et glatt vektorfelt som er definert på D, så er

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS.$$

Repetisjon i uke 17

Eksempel: Våren 2007 oppgave 6

La T være området som ligger innenfor torusen $z^2 + (r-2)^2 = 1$ og over kjeglen $z = r - 1$ (i sylinderkoordinater). Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xz - y, yz + x, x^2 + y^2).$$

a) Regn ut

$$\iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV.$$

b) La $\mathcal{S}_1$ være den delen av randen ∂T som ligger på kjeglen. Finn fluksen til $\mathbf{F}$ opp gjennom $\mathcal{S}_1$.

c) La $\mathcal{S}_2$ være den delen av randen ∂T som ligger på torusen. Finn fluksen til F opp gjennom $\mathcal{S}_2$.

Figurer

Eksempel divergensteoremet: https://www.math3d.org/R7SkRCwox