NTNU | Norwegian University of Science and Technology

TMA4105 MATEMATIKK 2

Oversiktsforelesning 11
Divergens, curl og Greens teorem

Vår 2024

Nøkkelbegreper

Divergens til et vektorfelt

Curl til et vektorfelt

Vektorpotensial

Greens teorem

Spørsmål?

Divergens til et vektorfelt

Divergensen til vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

der $(x,y,z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3$, er definert ved

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x,y,z) = \nabla \cdot \mathbf{F}(x,y,z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z).$$

Curl til et vektorfelt

Curlen til vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

der $(x, y, z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3$, er definert ved

$$\begin{aligned}&\text{curl } \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z)\\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z), \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z)\right).\end{aligned}$$

Eksempel: Curl til vektorfelt i planet

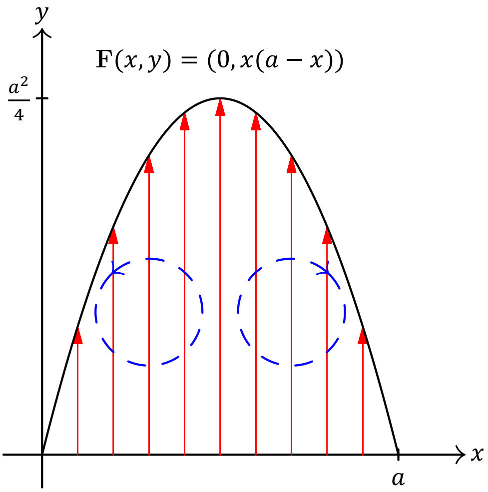
La

$$\mathbf{F}(x, y) = (0, x(a - x)),$$

der $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ og hvor $a > 0$.

Curlen til **F** er da gitt ved

$$\operatorname{curl} \mathbf{F}(x, y) = (0, 0, a - 2x).$$



Regneregler for div og curl

(a) $\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$

(b) $\nabla \cdot (\varphi\mathbf{F}) = (\nabla\varphi) \cdot \mathbf{F} + \varphi(\nabla \cdot \mathbf{F})$

(c) $\nabla \times (\varphi\mathbf{F}) = (\nabla\varphi) \times \mathbf{F} + \varphi(\nabla \times \mathbf{F})$

(d) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$

(e) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$

(f) $\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}$

(g) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$

(h) $\nabla \times (\nabla\varphi) = (0, 0, 0)$

(i) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$

Vektorpotensial

La $\mathbf{F}$ være et glatt vektorfelt definert på et område $D \subseteq \mathbb{R}^3$.

Anta at det finnes et vektorfelt $\mathbf{G}$ definert på D slik at

$$\operatorname{curl} \mathbf{G}(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)$$

for alle $(x, y, z) \in D$. Da er

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0.$$

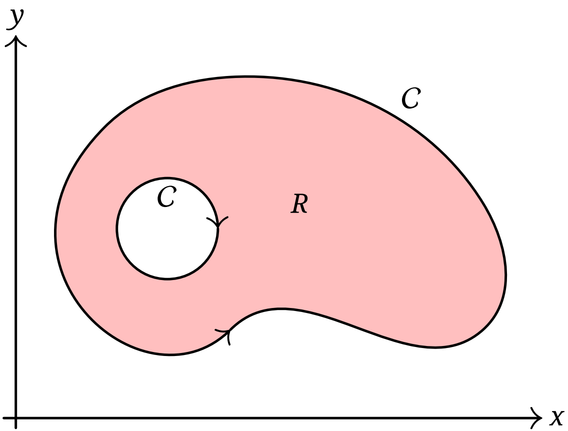
Vi sier at $\mathbf{G}$ er et vektorpotensial for $\mathbf{F}$.

Greens teorem

La R være et regulært, lukket område i xy-planet hvis rand, $\mathcal{C} = \partial R$, består av en eller flere stykkevis glatte, enkle lukkede kurver som er positivt orientert med hensyn på R.

Hvis $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ er et glatt vektorfelt definert på R, så er

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$



Divergensteoremet i planet

La R være et regulært, lukket område i xy-planet hvis rand, $\mathcal{C} = \partial R$, består av en eller flere stykkevis glatte, enkle lukkede kurver som er positivt orientert med hensyn på R.

Hvis $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ er et glatt vektorfelt definert på R, så er

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, ds = \iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA.$$