Anbefalte oppgaver uke 10

Våren 2024

Løsningsforslag

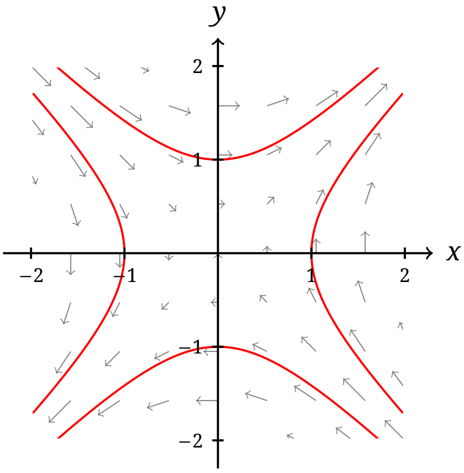
$\boxed{1}$ Feltlinjene er gitt ved $y = y(x)$ der

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

Dermed er $y\,dy = x\,dx$ som gir at

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Det vil si, $y^2 = x^2 + K$, der $K = 2C$. Plott av vektofeltet (grått) og feltlinjer (rødt) er gitt nedenfor:



$\boxed{2}$ Anta at $\mathbf{F}$ er konservativt. Da finnes det $\varphi(x, y)$ slik at

$$\varphi_x(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad \varphi_y(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

For $(x, y) \neq (0, 0)$ er φ annenordens kontinuerlig deriverbar og derfor må vi ha $\varphi_{xy}(x, y) = \varphi_{yx}(x, y)$ her, men det er lett å se at $\varphi_{xy}(x, y) = -\varphi_{yx}(x, y)$. Altså er ikke $\mathbf{F}$ konservativt.

$\boxed{3}$ Anta at φ er en potensialfunksjon. Da er

$$\begin{aligned}
\varphi_x(x, y, z) &= 2xy - z^2 &&\Longrightarrow \varphi(x, y, z) = x^2y - z^2x + C_1(y, z)\\
\varphi_y(x, y, z) &= 2yz + x^2 &&\Longrightarrow \varphi(x, y, z) = y^2z + x^2y + C_2(x, z)\\
\varphi_z(x, y, z) &= -2zx + y^2 &&\Longrightarrow \varphi(x, y, z) = -z^2x + y^2z + C_3(x, y)
\end{aligned}$$

slik at $C_1(y, z) = y^2z + K_1$, $C_2(x, z) = -z^2x + K_2$ og $C_3(x, y) = x^2y + K_3$, der vi kan sette konstantene K_1, K_2 og K_3 til å være 0.

Dermed er $\mathbf{F}$ konservativt og en potensialfunksjoner til $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\varphi(x, y, z) = x^2y - z^2x + y^2z.$$

4 La oss skrive $\mathbf{r} = (x, y, z), \mathbf{r}_0 = (a, b, c)$. Da har vi

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Vektorfeltet vi er på jakt etter er $\nabla\varphi = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$. På grunn av symmetri holder det å finne for eksempel

$$\varphi_x(x, y, z) = -\frac{2(x-a)}{((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2)^2},$$

for $\varphi_y(x, y, z)$ og $\varphi_z(x, y, z)$ fåes ved å erstatte i telleren $(x-a)$ med henholdsvis $y-b$ og $z-c$. Dermed er

$$\nabla\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^4}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

5 En potensialfunksjon finnes via tilsvarende fremgangsmåte som tidligere oppgaver. Betegn potensialfunksjoner med φ. Vi finner

$$\begin{aligned}
\varphi_x(x, y, z) &= \frac{2x}{z} &\implies \varphi(x, y, z) &= \frac{x^2}{z} + C_1(y, z)\\
\varphi_y(x, y, z) &= \frac{2y}{z} &\implies \varphi(x, y, z) &= \frac{y^2}{z} + C_2(x, z)\\
\varphi_z(x, y, z) &= -\frac{x^2 + y^2}{z^2} &\implies \varphi(x, y, z) &= \frac{x^2 + y^2}{z} + C_3(x, y)
\end{aligned}$$

slik at $C_1(y, z) = K_1$, $C_2(x, z) = K_2$ og $C_3(x, y) = K_3$, der vi kan sette konstantene K_1, K_2 og K_3 til å være 0. Dermed er $\mathbf{F}$ konservativt og en potensialfunksjon til $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\varphi(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z}.$$

Ekvipotensialflatene er gitt ved $\varphi(x, y, z) = E$, der E er konstant. Det vil si,

$$z = \frac{x^2 + y^2}{E}$$

der $E \neq 0$. Merk at dersom $E = 0$ så er $x^2 + y^2 = 0$, det vil si, $x = y = 0$. I tilfellet $E \neq 0$ får vi paraboloider. Feltlinjer kan vi finne for eksempel på følgende måte. Anta at integralkurven er gitt ved $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Det gir at

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2x}{z}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{2y}{z}, \quad \text{og} \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{x^2 + y^2}{z^2}.$$

Dette kan vi så skrive som

$$\frac{z}{2x}\,dx = \frac{z}{2y}\,dy = -\frac{z^2}{x^2 + y^2}\,dz$$

som igjen gir at

$$\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{y}\,dy = -\frac{2z}{x^2 + y^2}\,dz,$$

som gir $\ln(|x|) = \ln(|y|) + C$, det vil si, $y = Ax$ med A konstant. Innsatt i $x^2 + y^2$ foran dz får vi

$$\frac{1}{x}\,dx = -\frac{2z}{x^2 + A^2x^2}\,dz,$$

det vil si,

$$-2z\,dz = x(1 + A^2)\,dx.$$

Dermed er

$$-z^2 = \frac{1}{2}x^2(1 + A^2) + B$$

som etter å ha ganget med 2 og erstattet $2B$ med B' og x^3A^2 med y^2 gir oss at

$$-2z^2 = x^2 + y^2 + B',$$

det vil si,

$$-B' = 2z^2 + x^2 + y^2.$$

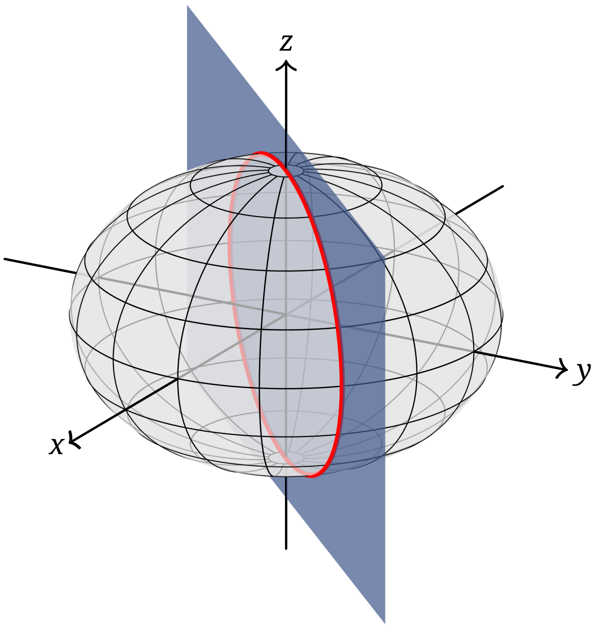
Merk nå at B må være negativ (eller i det minste ikke-positiv), siden $-z^2$ er det. Altså kan vi erstatte B' med en ikke-negativ konstant, D, slik at vi ender opp med ellpsoider

$$D = 2z^2 + x^2 + y^2.$$

Feltlinjene våre er disse ellipsoidene snittet med planene $y = Ax$, som dermed gir oss ellipser. Vi kan også typisk gi parametriseringer av deler (positive og negative z) for disse med x som parameter, si

$$\mathbf{r}(t) = \left(t, At, \pm\sqrt{\frac{D - t^2 - A^2t^2}{2}}\right).$$

Nedenfor har vi plottet en typisk slik feltlinje med $A = 1 = D$ i planet $y = x$ (siden vi har $\pm$ får vi egentlig to parametriseringer).



6 Vi finner $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (2t, 1, 2t)$ og dermed $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{8t^2 + 1}$. Dermed er

$$\int_C y\, ds = \int_0^m y(t)v(t)\, dt = \int_0^m t\sqrt{8t^2 + 1}\, dt = \frac{1}{24}\left((8m^2 + 1)^{3/2} - 1\right).$$

7 Vi parametriserer projeksjonen av sylinderen ved $x(t) = a\cos(t)$, $y(t) = a\sin(t)$, der $t \in [0, 2\pi]$. Dermed finner vi $z(t) = x(t) = a\cos(t)$ og parametriseringen for skjæringskurven mellom sylinderen $x^2 + y^2 = a^2$ og planet $z = x$ blir

$$\mathbf{r}(t) = a(\cos(t), \sin(t), \cos(t)), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Skal vi være i første oktant må vi faktisk videre restriktere $t \in [0, \pi/2]$. Vi deriverer og finner $\mathbf{v}(t) = a(-\sin(t), \cos(t), -\sin(t))$ og dermed $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = |a|\sqrt{1+\sin^2(t)}$. Dermed er

$$\int_C x\,ds = a|a| \int_0^{\pi/2} \cos(t)\sqrt{1+\sin^2(t)}\,dt = \frac{a|a|}{2}\left(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)\right).$$

$\boxed{8}$ Anta at $a > 0$ for enkelhetsskyld. Vi kan parametrisere $x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0$ orientert mot klokken ved bruk av $x(t) = a\cos(t)$ og $y(t) = a\sin(t)$, der $t \in [0, \pi]$. Dermed finner vi:

a) $\displaystyle\int_C x\,dy = \int_0^{\pi} x(t)y'(t)\,dt = a^2 \int_0^{\pi} \cos^2(t)\,dt = \frac{\pi}{2}a^2$

b) $\displaystyle\int_C y\,dx = \int_0^{\pi} y(t)x'(t)\,dt = -a^2 \int_0^{\pi} \sin^2(t)\,dt = -\frac{\pi}{2}a^2.$