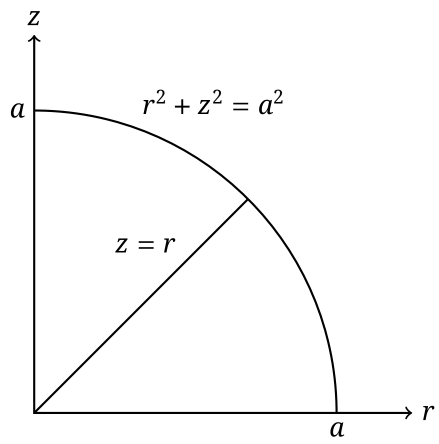
Anbefalte oppgaver uke 9

Våren 2024

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ Det er lurt med en skisse, og dette kan gjøres i planet: bytt ut y-aksen med z og x-aksen med r der vi bruker sylinderkoordinater. Vi må bare huske på at $r \geq 0$.



La oss først finne hvor kjeglen $z = r$ skjærer sfæren $r^2 + z^2 = a^2$. Vi finner at dette er når $2r^2 = a^2$ eller $r = a/\sqrt{2}$. Det følger at volumet vi ønsker er gitt ved

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \int_r^{\sqrt{a^2-r^2}} dz\, r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} r\left(\sqrt{a^2-r^2} - r\right) dr = \frac{1}{3}(2-\sqrt{2})\pi a^3.$$

$\boxed{2}$ Vi bruker sylinderkoordinater og finner at R er gitt ved $r^2 \leq z \leq \sqrt{2-r^2}$. Vi finner der flatene skjærer hverandre (verdien til r der vi har skjæring). Vi finner da at $r^4 = 2 - r^2$. Det vil si $r^4 + r^2 - 2 = 0$. Det vil si $(r^2 + 1/2)^2 - 1/4 - 2 = 0$ eller (husk at $r \geq 0$) $r = -1/2 + \sqrt{9/4} = 1$. Dermed blir integralet vi er på jakt etter gitt ved

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} z\, dz\, r\, dr\, d\theta = \pi \int_0^1 r\left(2 - r^2 - r^4\right) dr = \frac{7\pi}{12}.$$

$\boxed{3}$ Massesenteret er gitt ved (merk at $\mathbf{x}_{\text{cm}}$ og $\mathbf{x}$ er *vektorer* henholdsvis gitt ved $(x_{\text{cm}}, y_{\text{cm}}, z_{\text{cm}})$ og (x, y, z) nedenfor)

$$\mathbf{x}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \iiint_K \mathbf{x} \rho\, dV$$

der $M = \iiint_K \rho\, dV$. Symmetri gir at $x_{\text{cm}} = y_{\text{cm}} = z_{\text{cm}}$ så det holder å regne ut en av disse. Vi finner

$$M = \int_0^a \int_0^a \int_0^a (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = \int_0^a \int_0^a \left(\frac{a^3}{3} + y^2 a + z^2 a\right) dy\, dz$$
$$= \cdots = a^5$$

$$x_{\text{cm}} = \int_0^a \int_0^a \int_0^a x(x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = \int_0^a \int_0^a \left(\frac{a^4}{4} + y^2\frac{a^2}{2} + z^2\frac{a^2}{2}\right) dy\, dz$$
$$= \frac{a^6}{4} + a^3 \int_0^a y^2\, dy = \frac{a^6}{4} + \frac{a^6}{3} = \frac{7}{12}a^6.$$

Dermed er

$$\mathbf{x}_{\text{cm}} = \frac{7a}{12}(1, 1, 1)\,.$$

$\boxed{4}$ `https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/eksamen/lf_tma4105_08k.pdf`

$\boxed{5}$ `https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/eksamen/lf_sif5005_02k.pdf`

$\boxed{6}$

a) Volumet av en sylinder med høyde h og radius r finner vi for eksempel med sylinderkoordinater (det er vel naturlig!):

$$V_{\text{sylinder}} = \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_0^h dz \rho\, d\rho\, d\theta = 2\pi h \int_0^r \rho\, d\rho = \pi h r^2.$$

b) Volumet av en kule med radius R finner vi for eksempel med kulekoordinater (det er vel naturlig!):

$$V_{\text{kule}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R \rho^2 \sin(\varphi)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{\pi R^3}{4}.$$

c) Volumet av en kjegle med radius r og høyde h kan regnes ut ved å bruke sylinderkoordinater. La $z = a\rho$ der vi velger a slik at når $z = h$ så er $\rho = r$. Det gir at $a = h/r$. Altså er kjeglen vår gitt ved $z = (r/h)\rho$ og

$$V_{\text{kjegle}} = \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_{(h/r)\rho}^h dz\, \rho\, d\rho\, d\theta = 2\pi \int_0^r \left(h\rho - \frac{h}{r}\rho^2\right) d\rho = 2\pi\left(\frac{hr^2}{2} - \frac{h}{r}\frac{r^3}{3}\right) = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$