TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 8

Våren 2024

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ Det letteste er kanskje å bytte til polarkoordinater. Siden vi skal integrere over en kvartdisk i første kvadrant finner vi dermed

$$\iint_Q y\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_0^a r^2\sin(\theta)\,dr\,d\theta = \int_0^a r^2\,dr = \frac{a^3}{3}.$$

$\boxed{2}$ Gjennomsnittverdien til $f(x,y,z)$ over R er gitt ved

$$\bar{f}|_R = \frac{1}{V(R)}\iiint_R f\,dV$$

der $V(R)$ betegner volumet til R. Hvis R er enhetskuben er $V(R) = 1$ og vi ender opp i det tilfellet også $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ med

$$\begin{aligned}\bar{f}|_R &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^1\left(\frac{1}{3}+y^2+z^2\right)dy\,dz\\ &= \cdots = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 1.\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ **a)** Volumet av sylinder med høyde h og radius r:

$$V = \iint_{x^2+y^2\le r^2} h\,dA = h\,\mathrm{Areal}(\{x^2+y^2\le r^2\}) = \pi r^2 h.$$

b) Kule med radius R: se på $z = f(x,y) = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Volumet til kulen vi vil ha er da to ganger volumet av z over disken $x^2+y^2\le R^2$. Det vil si:

$$V = 2\iint_{x^2+y^2\le R^2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dA.$$

Bruk av polarkoordinater gir dermed:

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}\,dr\,d\theta = 4\pi\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}\,dr = \frac{4\pi}{3}R^3.$$

c) Volum av kjegle med radius r og høyde h: la $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ der $x^2+y^2\le r^2$. Da er grafen til z en kjegle med radius r og høyde r. Betrakt derfor $g(x,y) = h/r$ der $x^2+y^2\le r^2$ som før. Da er grafen til g en kjegle med radius r og høyde h. Volumet *under kjeglen*, som er volumet under grafen til g, er da gitt ved

$$V_0 = \iint_{x^2+y^2\le r^2} g(x,y)\,dA = \frac{h}{r}\iint_{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dA.$$

Bruk av polarkoordinater git dermed (nedenfor er r' *ikke* den deriverte til r (hva skulle dette i det hele tatt bety?), men kun en variabel vi bruker i integrasjonen siden r allerede er opptatt med rollen som radius)

$$V_0 = \frac{h}{r}\int_0^{2\pi}\int_0^r r'^2\,dr'\,d\theta = \frac{2\pi h}{r}\int_0^r r'^2\,dr' = \frac{2\pi h}{3}r^2.$$

Volumet av selve kjeglen blir nå volumet av en sylinder med radius r og høyde h, som er $\pi r^2 h$, minus V_0. Altså er volumet vi er på jakt etter gitt ved

$$V = \pi r^2 h - \frac{2\pi h}{3} r^2 = \frac{\pi h r^2}{3}.$$

Vi kunne også fått dette direkte ved å erstatte g ovenfor med $h - g$.

$\boxed{4}$ Anta at polarkurven vår er $r = f(\theta)$ med $\theta \in [a, b]$. Da er integrasjonsområdet vårt i polarkoordinater gitt ved $\mathcal{D} = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le f(\theta), a \le \theta \le b\}$. Altså er arealet av dette området, som riktignok også er arealet innesluttet at polarkurven vår:

$$\iint_{\mathcal{D}} 1\, dA = \int_a^b \int_0^{f(\theta)} r\, dr\, d\theta = \int_a^b \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{f(\theta)} d\theta = \frac{1}{2}\int_a^b f(\theta)^2\, d\theta$$

som er formelen vi kjenner til fra før (uke 2). For arealet innesluttet av ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ bruker vi variabelskiftet $u = x/a$ og $v = y/b$. Det gir at ellipsen er $u^2 + v^2 = 1$ som enhetssirkelen i uv-planet. Arealet innesluttet av ellipsen (i xy-planet) er derfor arealet av enhetsdisken i uv-planet. La ellipsen være E og la enhetsdisken være $\mathbb{D}$. Vi har altså fra variabelskifteformelen

$$\iint_E dx\, dy = \iint_{\mathbb{D}} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\, dv.$$

Siden $x = au$, $y = bv$ er (absoluttverdien av) jacobideterminanten $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = |ab|$. Vi kan godt for enkelhetsskyld anta at $a, b > 0$. Altså finner vi at

$$\text{Areal}(E) = ab \iint_{\mathbb{D}} du\, dv = ab\, \text{Areal}(\mathbb{D}) = \pi ab.$$

$\boxed{5}$ https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/eksamen/lf_tma4105_10k.pdf

$\boxed{6}$ https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/eksamen/lf_tma4105_2016v.pdf

$\boxed{7}$ https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/eksamen/tma4105_15v_lf.pdf