TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 7

Våren 2024

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ Dette er med en gang arealet til rektangelet som er $4 \cdot 5 = 20$.

$\boxed{2}$ Siden y^3 og x er begge odde funksjoner bidrar ikke disse til integralet over enhetsdisken $x^2 + y^2 \leq 1$. Derfor ender vi opp med

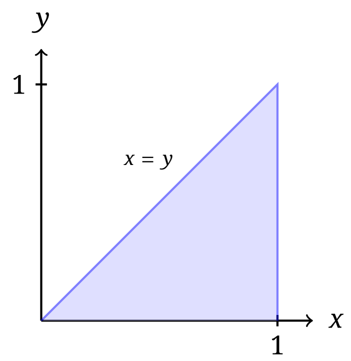
$$\iint_D dA$$

der D er enhetsdisken. Dette er 5 ganger arealet til D som blir 5π.

$\boxed{3}$ Vi har

$$\int_0^1 \int_0^x (xy + y^2)\, dy\, dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3}\right) dx = \frac{5}{6} \int_0^1 x^3\, dx = \frac{5}{24}.$$

$\boxed{4}$ Integrasjonsområdet er gitt i figuren under, og integralet kan finnes ved å bytte integrasjonsgrenser.



Det gir (ved for eksempel hjelp av figuren) at

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^x e^{-x^2}\, dy\, dx = \int_0^1 x e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1}\right).$$

$\boxed{5}$ La rektangelet være R og arealet $A(R) = (b-a)(d-c)$. Gjennomsnittverdien til $f(x,y) = x^2$ over R er så

$$\begin{aligned}\bar{f}|_R &= \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x,y)\, dA = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d x^2\, dy\, dx \\ &= \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b x^2 (d-c)\, dx = \frac{1}{3(b-a)}(b^3 - a^3).\end{aligned}$$

Merk at vi kan skrive $b^3 - a^3 = (b-a)(a^2 + ab + b^2)$ og derfor ender vi opp med

$$\bar{f}|_R = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

$\boxed{6}$ Merk at $hk = A(R_{h,k})$ er arealet av rektangelet $R_{h,k}$. Altså er det vi vil vise:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{A(R_{h,k})} \iint_{R_{h,k}} f(x,y)\,dA = f(a,b).$$

Siden $f(a,b)$ er konstant, får vi at

$$f(a,b) = \frac{1}{A(R_{h,k})} \iint_{R_{h,k}} f(a,b)\,dA.$$

Altså er det vi vil vise:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{A(R_{h,k})} \iint_{R_{h,k}} (f(x,y) - f(a,b))\,dA = 0.$$

La $\epsilon > 0$. Siden f er kontinuerlig i (a,b) følger det at vi kan finne $\delta > 0$ slik at hvis $|(x,y)-(a,b)| < \delta$ så har vi $|f(x,y) - f(a,b)| < \epsilon$. Merk at for alle $(x,y) \in R_{h,k}$ så har vi at $|(x,y)-(a,b)| \leq \operatorname{diag}(R_{h,k}) = \sqrt{h^2+k^2}$. Men det betyr at om vi velger $|h|, |k|$ så liten at $\sqrt{h^2+k^2} < \delta$, så har vi $|f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$. Spesielt følger det at

$$\left| \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{A(R_{h,k})} \iint_{R_{h,k}} (f(x,y) - f(a,b))\,dA \right| \leq \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon \frac{1}{A(R_{h,k})} \iint_{R_{h,k}} dA = \varepsilon.$$

Resultatet følger nå ved å merke at dette er sant for alle $\epsilon > 0$ og derfor også om vi lar $\epsilon \to 0$.