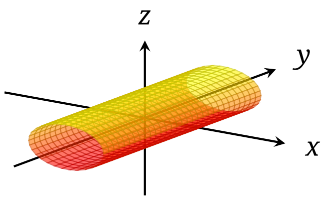
Anbefalte oppgaver uke 4

Våren 2024

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ Siden y ikke dukker opp, er det ingen begrensninger på y. I xz-planet vet vi at vi har en ellipse $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + z^2 = 1$. Den totale flaten er derfor en uendelig lang elliptisk sylinder som strekker seg i y-retning.



$\boxed{2}$ Vi deriverer og finner

$$w_x(x, y, z) = \frac{e^{xyz} yz}{1 + e^{xyz}}$$

og pågrunn av symmetrien, har vi w_y, w_z det samme, men med x erstattet med henholdsvis y og z:

$$\begin{aligned} w_y(x, y, z) &= \frac{e^{xyz} zx}{1 + e^{xyz}} \\ w_z(x, y, z) &= \frac{e^{xyz} yx}{1 + e^{xyz}}. \end{aligned}$$

Evaluering i punktet $p = (2, 0, -1)$ gir dermed:

$$\begin{aligned} w_x(p) &= 0 \\ w_y(p) &= -1 \\ w_z(p) &= 0. \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Derivasjon gir

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}. \end{aligned}$$

Evaluering i punktet $p = (-3, 4)$ gir dermed:

$$\begin{aligned} f_x(p) &= \frac{3}{\sqrt{9 + 16}^3} = \frac{3}{5^3} \\ f_y(p) &= -\frac{4}{5^3}. \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ Derivasjon gir:

$$\begin{aligned} z_x(x,y) &= 2x(1+y^2) \\ z_{xx}(x,y) &= 2(1+y^2) \\ z_y(x,y) &= 2yx^2 \\ z_{yy}(x,y) &= 2x^2 \\ z_{xy}(x,y) &= z_{yx} = 4xy. \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ Vi deriverer og finner

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{2x}{x^2+y^2} \\ f_{xx}(x,y) &= \frac{2(x^2+y^2) - 2x(2x)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= 2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

og på grunn av symmetri, finner vi $f_{yy}(x,y) = 2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$; det vil si det samme, men med x byttet ut med y. Disse holder selvfølgelig bare vekk fra origo. Addisjon gir dermed

$$f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = 0, \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

som viser utsagnet (se boken for definisjon av harmoniske funksjoner).