TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 3

Våren 2024

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ Hastigheten er

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (2t, -2t, 0)$$

og akselerasjonen er

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = (2, -2, 0).$$

Farten er

$$v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{8t^2} = 2\sqrt{2}t$$

for $t \geq 0$. Banen til partikkelen befinner seg i planet $z = 1$ og er gitt som en del av linjen $\frac{y}{x} = -1$ eller $y = -x$ i dette planet, nemlig den delen der $x \geq 0$.

$\boxed{2}$ Her må vi skrive $u = u(t)$, $\mathbf{r}(t) = (3u(t), 3u(t)^2, 2u(t)^3)$. Dermed er

$$\mathbf{v}(t) = u'(t)\big(3, 6u(t), 6u(t)^2\big).$$

Vi vet at $u'(t) \geq 0$ (siden positiv orientering er i retning av økende u) så vi finner

$$v(t) = |\mathbf{v}(t)| = u'(t)\sqrt{3^2 + 6^2(u(t)^2 + u(t)^4)} = 6.$$

Det gir

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{6}{6\sqrt{\frac{1}{2^2} + u(t)^2 + u(t)^4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1+4u(t)^2+4u(t)^2}{4}}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{(1+2u(t)^2)^2}}. \end{aligned}$$

Enda en derivasjon gir så

$$\begin{aligned} u''(t) &= -\frac{2}{2\sqrt{(1+2u(t)^2)^2}^3}(2(1+2u(t)^2)4u(t)u'(t)) \\ &= -\frac{8(1+2u(t)^2)}{\sqrt{(1+2u(t)^2)^2}^3}u(t)u'(t). \end{aligned}$$

Anta nå at $\mathbf{r}(t_0) = (3, 3, 2)$. Det gir $u(t_0) = 1$. Dermed $u'(t_0) = 2/3, u''(t_0) = -16/27$. Det gir at hastigheten i punktet $(3, 3, 2)$ er

$$\mathbf{v}(t_0) = \frac{2}{3}(3, 6, 6) = (2, 4, 4).$$

Akselerasjonen er gitt ved

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = u''(t)(3, 6u(t), 6u(t)^2) + u'(t)(0, 6u'(t), 12u(t)u'(t))$$

og dermed for $t = t_0$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(t_0) &= -\frac{16}{27}(3,6,6) + \frac{2}{3}(0,4,8) \\
&= \left(-\frac{16}{9}, -\frac{8}{9}, \frac{16}{9}\right) \\
&= \frac{8}{9}(-2,-1,2).
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Vi har

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= (t^2, t^2, t^3) \\
\mathbf{v}(t) &= \mathbf{r}'(t) = (2t, 2t, 3t^2) \\
v(t) &= |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{8t^2 + 9t^4} = t\sqrt{8 + 9t^2}
\end{aligned}$$

siden $|t| = t$ for $t \in [0,1]$. Buelengden blir dermed

$$L = \int_0^1 t\sqrt{8 + 9t^2}\,dt = \frac{1}{27}\left(17\sqrt{17} - 16\sqrt{2}\right).$$

$\boxed{4}$ La $\gamma(s)$ være buelengdeparametriseringen for kurven. Da har vi $\mathbf{T}(s) = \gamma'(s)$ og $\kappa(s) = |\mathbf{T}'(s)|$. Siden $\kappa(s) = 0$ for alle s følger det at $\mathbf{T}'(s) = 0$ for alle s og da at $\mathbf{T}(s) = \mathbf{a} = \gamma'(s)$ for en eller annen konstant vektor $\mathbf{a}$. Dermed er $\gamma(s) = \mathbf{a}s + \mathbf{b}$ for en eller annen konstant vektor $\mathbf{b}$ også. Dette er en parametrisering for en rett linje gjennom $\mathbf{b}$ i retning av $\mathbf{a}$.

$\boxed{5}$ Vi bruker x som parameter og skriver $\mathbf{r}(x) = (x, e^x)$. Vi finner så

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(x) &= \mathbf{r}'(x) = (1, e^x) \\
v(x) &= |\mathbf{v}(x)| = \sqrt{1 + e^{2x}} \\
\hat{\mathbf{T}}(t) &= \frac{1}{v(x)}\mathbf{v}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}(1, e^x) \\
\hat{\mathbf{T}}'(x) &= -\frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}^3}(1, e^x) + \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}(0, e^x) \\
&= -\frac{e^{2x}}{v(x)^3}(1, e^x) + \frac{1}{v(x)}(0, e^x) \\
&= \frac{1}{v(x)^3}\left(-e^{2x}, -e^{3x} + v(x)^2 e^x\right) \\
&= \frac{e^x}{v(x)^3}(-e^x, -e^{2x} + v(x)^2) \\
|\hat{\mathbf{T}}'(x)|^2 &= \frac{e^{2x}}{v(x)^6}(e^{2x} + v(x)^4 - 2v(x)^2 e^{2x} + e^{4x}) \\
&= \frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^3}(e^{2x} + (1+e^{2x})^2 - 2(1+e^{2x})e^{2x} + e^{4x}) \\
&= \frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^3}\left(e^{2x} + 1 + 2e^{2x} + e^{4x} - 2e^{2x} - 2e^{4x} + e^{4x}\right) \\
&= \frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^3}(e^{2x} + 1) \\
&= \frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}.
\end{aligned}$$

Altså er $|\hat{\mathbf{T}}'(x)| = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$. Siden krumningen er $\kappa(x) = \frac{1}{v(x)}|\hat{\mathbf{T}}'(x)|$, får vi

$$\kappa(x) = \frac{e^x}{(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}}}.$$