Anbefalte oppgaver uke 15

Våren 2024

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ Dersom vektorfeltet er konstant er naturligvis divergensen 0, så utsagnet er en direkte konsekvens av divergensteoremet.

$\boxed{2}$ Vi bruker divergensteoremet. Vi har $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 1 - 2 + 4 = 3$ slik at fluksen er 3 ganger volumet til kulen: $4\pi a^3$.

$\boxed{3}$ Siden divergensen til integrandvektorfeltet vårt er 3, følger det fra divergensteoremet at fluksen (som er integralet på høyresiden uten konstanten $1/3$ foran) er lik 3 ganger volumet. Altså er volumet $1/3$ av fluksen. Det er nøyaktig det vi skulle vise.

Vi kunne erstattet integrandvektorfeltet med et hvilken som helst annet vektorfelt med divergens lik en eller annen konstant $c \neq 0$. Hvis $\mathbf{F}$ er et slikt vektorfelt med $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = c \neq 0$, følger det dermed at

$$\frac{1}{c} \oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = V.$$

$\boxed{4}$ La $\mathbf{F} = \nabla\varphi$. Vi har fra formelen til den retningsderiverte at $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = \nabla\varphi \cdot \hat{\mathbf{N}}$. Siden $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \operatorname{div}(\nabla\varphi) = \Delta\varphi$ følger derfor formelen direkte fra divergensteoremet.

$\boxed{5}$ La $\mathbf{F} = \varphi\nabla\psi$. Det følger fra formelen til den retningsderiverte at $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = \varphi\nabla\psi \cdot \hat{\mathbf{N}} = \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}$. Videre følger det fra produktregelen at $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \varphi\Delta\psi + \nabla\varphi \cdot \nabla\psi$. Altså gir divergensteoremet at

$$\iint_D (\varphi\Delta\psi + \nabla\varphi \cdot \nabla\psi)\, dV = \oiint_S \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\, dS.$$

Vi erstatter nå φ med ψ og får

$$\iint_D (\psi\Delta\varphi + \nabla\varphi \cdot \nabla\psi)\, dV = \oiint_S \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS.$$

Subtraksjon gir dermed den ønskede formelen.

$\boxed{6}$ Med $\mathbf{F} = \varphi\mathbf{c}$ der $\mathbf{c}$ er en konstant vektor, følger det at $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \nabla\varphi \cdot \mathbf{c}$. Dermed gir divergensteormet at

$$\iiint_D \nabla\varphi \cdot \mathbf{c}\, dV = \oiint_S \varphi\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

La oss skrive $\hat{\mathbf{N}} = (N_1, N_2, N_3)$. Velger vi nå $\mathbf{c} = (1, 0, 0)$, finner vi

$$\iiint_D \varphi_x\, dV = \oiint_S \varphi N_1\, dS.$$

Velger vi $\mathbf{c} = (0, 1, 0)$ får vi

$$\iiint_D \varphi_y\, dV = \oiint_S \varphi N_2\, dS.$$

og velger vi tilslutt $\mathbf{c} = (0, 0, 1)$ får vi

$$\iiint_D \varphi_z\, dV = \oiint_S \varphi N_3\, dS.$$

Disse tre identitetene gir det ønskede resultatet: gang den første med vektoren $(1, 0, 0)$, den andre med vektoren $(0, 1, 0)$, og den siste med vektoren $(0, 0, 1)$ og legg sammen resultatene.

[7] https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/eksamen/lf_sif5005_03k.pdf

[8] https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/eksamen/sif5005_1998-05-14_lf.pdf

[9] https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/eksamen/lf_sif5005_00k.pdf