Anbefalte oppgaver uke 12

Våren 2024

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ La oss starte med for eksempel $\mathrm{div}(\mathrm{curl}(\mathbf{F})) = 0$. La $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ være vektorfeltet vårt, et vilkårlig glatt vektorfelt i rommet. La $\mathbf{G} = \mathrm{curl}(\mathbf{F}) = (G_1, G_2, G_3)$. En nyttig måte å få fatt i $\mathbf{G}$ på er å huske én av komponentene, si G_1, gitt ved

$$G_1 = \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}$$

og så merke at de resterende komponentene kan fåes ved å permutere indekser syklisk. Det dette betyr er at $(x \to y \to z \to x)$ også videre, og tilsvarende $(1 \to 2 \to 3 \to 1)$ også videre. Dermed finner vi G_2, neste komponent, ved å syklisk permutere indekser én gang:

$$G_2 = \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}$$

og tilslutt G_3 ved å syklisk permutere indekser nok en gang:

$$G_3 = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Herifra finner vi divergensen til $\mathbf{G}$ direkte:

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathbf{G}) &= \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} \\ &= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} \\ &= 0\end{aligned}$$

der vi har brukt at de blandede partielle deriverte er like; det er blant annet her glattheten til $\mathbf{F}$ kommer inn i bildet. Siden $\mathbf{F}$ var et vilrkålig (men glatt) vektorfelt, følger det at vi har identiteten $\mathrm{div}(\mathrm{curl}) = 0$.

Det neste blir nå å vise identiteten $\mathrm{curl}(\mathrm{grad}(f)) = 0$ der f er et vilkårlig, men glatt, skalarfelt. Da har vi naturligvis $\mathrm{grad}(f) = (f_x, f_y, f_z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$. La $\mathbf{F} = \mathrm{grad}(f) = (F_1, F_2, F_3)$ og la $\mathbf{G} = \mathrm{curl}(\mathbf{F}) = (G_1, G_2, G_3)$. Vi har lyst å vise at $\mathbf{G} \equiv \mathbf{0}$. Vi kan bruke uttrykkene for G_1, G_2 og G_3 ovenfor. Da finner vi:

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) \\ &= (0, 0, 0)\end{aligned}$$

som var det vi ville vise, der siste likhet følger igjen av at blandende partielle deriverte er like (som i sin tur følger fra glattheten til f; igjen: det holder at f er andreordens deriverbar). Siden f var vilkårlig, følger identiteten vi ville vise.

2 I vårt tilfelle er

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \operatorname{div}(y,z,x) = 0$$
$$\operatorname{curl}(\mathbf{F}) = \operatorname{curl}(y,z,x) = \left(\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right) = -(1,1,1).$$

3 Vi kan bruke kjerneregelen, men vi kan også bare skrive alt om til kartesiske koordinater for så å overtsette tilbake til polarkoordinater etter å ha regnet ut divergensen og curlen i kartesiske koordinater på vanlig måte. Vi har at

$$\mathbf{F}(x,y) = (r, \sin\theta) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

som gir at

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathbf{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} \\
&= \frac{x(x^2+y^2) + (x^2+y^2) - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} \\
&= \frac{x(x^2+y^2) + x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} \\
&= \frac{r^3\cos(\theta) + r^2\cos^2(\theta)}{r^3} = \frac{(r+\cos(\theta))\cos(\theta)}{r}
\end{aligned}$$

Videre så kan curl($\mathbf{F}$) finnes på tilsvarende måte. La oss skrive $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$. Da er

$$\begin{aligned}
\operatorname{curl}(\mathbf{F}) = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathbf{k} \\
&= \left(-\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}^3} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\mathbf{k} \\
&= \left(\frac{-xy - y(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\right)\mathbf{k} \\
&= \left(\frac{-r^2\cos(\theta)\sin(\theta) - r^3\sin(\theta)}{r^3}\right)\mathbf{k} \\
&= -\sin(\theta)\frac{\cos(\theta)+r}{r}\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

4 Fra divergensteoremet i planet har vi

$$\oint_{C_\varepsilon} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,ds = \iint_{\mathbb{D}_\varepsilon} \operatorname{div}(\mathbf{F})\,dA,$$

der $\mathbb{D}_\varepsilon$ er disken med sentrum i origo og radius $\varepsilon > 0$. La oss skrive $\psi = \operatorname{div}(\mathbf{F})$. Da vet vi at ψ er glatt, og spesielt at er den kontinuerlig. Det siste integralet blir nå $\iint_{\mathbb{D}_\varepsilon} \psi\,dA$. Siden ψ er kontinuerlig følger det at

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\iint_{\mathbb{D}_\varepsilon} dA}\iint_{\mathbb{D}_\varepsilon} \psi\,dA = \psi(0,0)$$

som gir oss det vi ønsket å vise (merk at $\iint_{\mathbb{D}_\varepsilon} dA = \pi\varepsilon^2 = \text{Areal}(\mathbb{D}_\varepsilon)$).

Kommentar: Tenk godt gjennom hvorfor den siste grenseverdien er sann. Her er et tips: det holder å vise at

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\text{Areal}(\mathbb{D}_\varepsilon)} \iint_{\mathbb{D}_\varepsilon} \psi \, dA - \psi(0,0) = 0.$$

Merk nå at siden $\psi(0,0)$ er et tall, så kan vi skrive $\psi(0,0) = \frac{1}{\text{Areal}(\mathbb{D}_\varepsilon)} \iint_{\mathbb{D}_\varepsilon} \psi(0,0) \, dA$. Altså holder det nå å vise at

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\text{Areal}(\mathbb{D}_\varepsilon)} \iint_{\mathbb{D}_\varepsilon} (\psi - \psi(0,0)) \, dA = 0.$$

Ved kontinuitet kan vi nå få $|\psi(x,y) - \psi(0,0)|$ så liten vi vil for $(x,y) \in \mathbb{D}_\varepsilon$ bare vi velger ε liten nok. Da er man mer eller mindre egentlig i mål.

5 Vi har at

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (f(r)\mathbf{r}) &= \text{div}(f(r)\mathbf{r}) = \text{div}(f(r)(x,y,z)) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(f(r)x) + \frac{\partial}{\partial y}(f(r)y) + \frac{\partial}{\partial z}(f(r)z) \\
&= f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}x + f(r) + f'(r)\frac{\partial r}{\partial y}y + f(r) + f'(r)\frac{\partial r}{\partial z}z \\
&= f'(r)x\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} + f'(r)y\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2} \\
&\quad + z^2 + f'(r)z\frac{\partial}{\partial z}\sqrt{x^2+y^2+z^2} + 3f(r) \\
&= f'(r)\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) + 3f(r) \\
&= rf'(r) + 3f(r).
\end{aligned}$$

At $f(r)\mathbf{r}$ er divergensfritt betyr at divergensen er 0. Dermed får vi ligningen

$$rf'(r) + 3f(r) = 0$$

eller om vi deler på $r \neq 0$ (det kan vi godt anta),

$$f'(r) + \frac{3}{r}f(r) = 0.$$

Vi kan løse dette ved for eksempel bruk av en integrerende faktor: $e^{3\ln(r)} = e^{\ln(r^3)} = r^3$ slik at vi ender opp med

$$\frac{d}{dr}\left(r^3 f(r)\right) = 0$$

eller

$$f(r) = Cr^{-3}$$

der C er en eller annen konstant.

6 https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/eksamen/lf_tma4105_2016k.pdf

7 https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/eksamen/lf_tma4105_12v.pdf