TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 11

Våren 2024

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ I kulekoordinater har vi:

$$
\begin{aligned}
x &= a\sin(\varphi)\cos(\theta) \\
y &= a\sin(\varphi)\sin(\theta) \\
z &= a\cos(\varphi)
\end{aligned}
$$

slik at parametrisering for sfæren blir

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

med partielle deriverte

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_\varphi &= \big(a\cos(\varphi)\cos(\theta), a\cos(\varphi)\sin(\theta), -a\sin(\varphi)\big) \\
\mathbf{r}_\theta &= \big(-a\sin(\varphi)\sin(\theta), a\sin(\varphi)\cos(\theta), 0\big)
\end{aligned}
$$

som gir kryssproduktet

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta| &= \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos(\varphi)\cos(\theta) & a\cos(\varphi)\sin(\theta) & -a\sin(\varphi) \\ -a\sin(\varphi)\sin(\theta) & a\sin(\varphi)\cos(\theta) & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \Big(a^2\sin^2(\varphi)\cos(\theta), a^2\sin^2(\varphi)\sin(\theta), a^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\Big)
\end{aligned}
$$

som har lengde

$$|\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta| = a^2\sqrt{\sin^4(\varphi) + \cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi)} = a^2\sin(\varphi)$$

siden $\varphi \in [0, \pi]$ (ellers måtte vi generelt hatt absoluttverdi av $\sin(\varphi)$). Dermed følger det at flatelementet er $dS = a^2\sin(\varphi)\,d\varphi\,d\theta$.

$\boxed{2}$ Vi bruker x og y som parametre og skriver $z = x^2/2$. Projeksjonen av flaten vår i xy-planet er kvartdisken $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$. Med $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x^2/2)$ som parametrisering får vi

$$\mathbf{r}_x = (1, 0, x) \quad \text{og} \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, 0)$$

slik at

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = (-x, 0, 1)$$

sånn at lengden av dette er $\sqrt{x^2+1}$. Dermed er

$$
\begin{aligned}
\iint_S x\sqrt{x^2+1}\,dS &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\sqrt{x^2+1}\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{x^2+1}^3\Big|_0^{\sqrt{1-y^2}}\,dy \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 \Big(\sqrt{2-y^2}^3 - 1\Big)\,dy \\
&= \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{3}$ Kjeglen skjærer planet i $1+y=\sqrt{2(x^2+y^2)}$ eller $(1+y)^2=2(x^2+y^2)$. Det vil si,

$$1=2(x^2+y^2)-y^2-2y=2x^2+y^2-2y$$

som ved fullføring av kvadrat i y gir

$$2=2x^2+(y-1)^2.$$

Dermed er

$$1=x^2+\left(\frac{y-1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Dette er en ellipse i x og y. Vi vil ikke bare ha ellipsen, men innsiden også. Vi kan parametrisere ved bruk av parametre (r,θ) tilsvarende polarkoordinater, der

$$x(r,\theta)=r\cos(\theta) \quad \text{og} \quad y(r,\theta)=1+\sqrt{2}r\sin(\theta)$$

med $\theta\in[0,2\pi]$ og $r\in[0,1]$. Fra $z=1+y$ får vi dermed $z(r,\theta)=2+\sqrt{2}r\sin(\theta)$. Dermed får vi at en parametrisering for $\mathcal{S}$ er gitt ved

$$\mathbf{r}(r,\theta)=\big(r\cos(\theta),1+\sqrt{2}r\sin(\theta),2+\sqrt{2}r\sin(\theta)\big).$$

Det gir at

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_r&=\big(\cos(\theta),\sqrt{2}\sin(\theta),\sqrt{2}\sin(\theta)\big)\\ \mathbf{r}_\theta&=\big(-r\sin(\theta),\sqrt{2}r\cos(\theta),\sqrt{2}r\cos(\theta)\big)\end{aligned}$$

slik at

$$\mathbf{r}_r\times\mathbf{r}_\theta=\det\left(\begin{bmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \cos(\theta)&\sqrt{2}\sin(\theta)&\sqrt{2}\sin(\theta)\\ -r\sin(\theta)&\sqrt{2}r\cos(\theta)&\sqrt{2}r\cos(\theta)\end{bmatrix}\right)=\big(0,-\sqrt{2}r,\sqrt{2}r\big)$$

som gir at

$$|\mathbf{r}_r\times\mathbf{r}_\theta|=2r.$$

Dermed er

$$\iint_{\mathcal{S}} y\,dS=2\int_0^{2\pi}\int_0^1\big(1+\sqrt{2}r\sin(\theta)\big)r\,dr\,d\theta=2\pi.$$

$\boxed{4}$ Randen til projeksjonen av skjæringsflaten finner vi for $x^2=1-3x^2-y^2$ (når de to z uttrykkene er like hverandre). Dette gir $4x^2+y^2=1$ som er en ellipse. I første oktant får vi kun kvarte ellipsen med $x,y\geq 0$. Kall denne E. Vi bruker x og y som parametre og finner en parametrisering for $\mathcal{S}$ gitt ved

$$\mathbf{r}(x,y)=(x,y,x^2),\qquad (x,y)\in E.$$

Dermed er

$$\mathbf{r}_x=(1,0,2x)\quad\text{og}\quad\mathbf{r}_y=(0,1,0)$$

som gir at

$$\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y=\det\left(\begin{bmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ 1&0&2x\\ 0&1&0\end{bmatrix}\right)=(-2x,0,1)$$

slik at lengden av denne er $\sqrt{4x^2+1}$. Vi finner derfor at

$$\begin{aligned}\iint_S xz\,dS &= \iint_E x^3\sqrt{4x^2+1}\,dy\,dx \\ &= \int_0^{1/2} x^3\sqrt{4x^2+1}\sqrt{1-4x^2}\,dx \\ &= \int_0^{1/2} x^3\sqrt{1-16x^4}\,dx \\ &= \frac{1}{96}.\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ Vi sparer oss litt tid hvis vi merker oss at vi kun får bidrag fra fluks gjennom planet $y=0$ og Π gitt ved $x+2y+3z=6$: det er ikke noe bidrag gjennom $z=0$ siden $\mathbf{F}$ ikke har noe z-komponent, og det er ikke noe bidrag gjennom $x=0$ fordi $\mathbf{F}\cdot(-1,0,0)=-x=0$ når $x=0$. Når $y=0$ finner vi fra Π at $x+3z=6$. Videre finner vi at $\mathbf{F}\cdot(0,-1,0)=-z$. Fluksbidraget gjennom $y=0$ er så gitt ved

$$\Phi_{y=0} = \iint_{x+3z\le 6, x,z\ge 0}(-z)\,dA = -\int_0^2 z(6-3z)\,dz = -4.$$

Det gjenstår å finne fluksen gjennom Π. Det kan vi gjøre på følgende måte. Vi parametriserer Π ved bruk av x, y som gir oss

$$\mathbf{r}(x,y) = \left(x, y, \frac{6-x-2y}{3}\right)$$

der $(x,y)\in D$ og D er gitt som projeksjonen av Π ned i xy-planet. Dermed er

$$\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y = \det\left(\begin{bmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 0 & -1/3\\ 0 & 1 & -2/3\end{bmatrix}\right) = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right)$$

og siden denne har positiv z-komponent har vi funnet riktig normalvektor. Dermed blir fluksbidraget

$$\begin{aligned}\Phi_\Pi &= \iint_D \mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y)\,dA \\ &= \iint_{x+2y\le 6, x,y\ge 0}\left(\frac{x}{3}+\frac{2}{3}z(x,y)\right)dx\,dy \\ &= \int_0^3\int_0^{6-2y}\left(\frac{x}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{6-x-2y}{3}\right)\right)dx\,dy \\ &= 10.\end{aligned}$$

Totalfluks er så gitt ved $\Phi = \Phi_{y=0}+\Phi_\Pi = 10-4=6$.

$\boxed{6}$ `https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/eksamen/lf_tma4105_04v.pdf`

$\boxed{7}$ `https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/eksamen/lf_tma4105_09k.pdf`