Interaktiv forelesning uke 10

Våren 2024

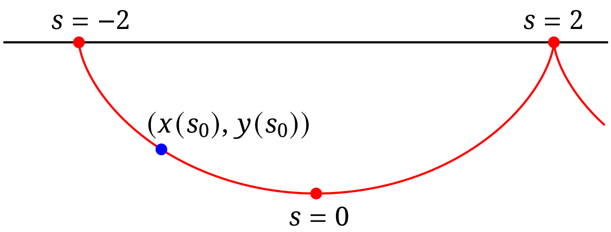
Alternativ for MTFYMA

$\boxed{3}$ Buelengdeparametriseringen av sykloiden (for sirkeldiameter = 1) er gitt ved

$$x(s) = \arccos\left(-\frac{s}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(2\arccos\left(-\frac{s}{2}\right)\right)$$
$$y(s) = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - 1$$

for $-2 \leq s \leq 2$.

La en kloss skli friksjonsfritt langs siden på sykloiden fra startpunktet $(x(s_0), y(s_0))$, for $-2 < s_0 < 0$, med starthastighet null.



Vi skal vise at at tiden det tar før klossen når bunnen er uavhengig av s_0.

a) Finn et utrykk for farten $v(s)$ som en funksjon av buelengden.
(Vink: Bruk energibevaring.)

b) Sett opp et linjeintegral som beregner tiden fra $s = s_0$ til $s = 0$, og regn ut.

Bonusinfo

Hvorfor forventer vi at sykloiden er *isokron*, slik vi har vist over? Et velkjent isokront dynamisk system er den harmonisk oscillatoren, med løsninger på formen $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$, der egenfrekvensen $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ selvsagt er uavhengig av startposisjonen x_0. I oppgaven over fant vi at den bevarte energien for klossen som sklir ned sykloiden er

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{mg}{4}s^2,$$

siden $y(s) = \frac{s^2}{4} - 1$. Hvis vi sammenligner dette uttrykket med den den bevarge energien for den harmoniske oscillatoren,

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{k}{2}x^2,$$

ser vi at s oppfører seg som løsningen til en harmonisk oscillator, med egenfrekvens $\omega = \sqrt{\frac{g}{2}}$.