TMA4105 Matematikk 2

Interaktiv forelesning uke 10

Våren 2024

$\boxed{1}$ Skisser de to vektorfeltene

$$\mathbf{F}(x, y) = (-x, y) \qquad \text{og} \qquad \mathbf{G}(x, y) = \left(-y, x^2\right),$$

og bestem strømningslinjene (feltlinjene) til hvert av dem. Avgjør også om vektorfeltene har tilhørende potensialfunksjoner, og finn eventuelt disse.

$\boxed{2}$ En tråd ligger langs kurven parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = \left(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t\right)$$

for $t \in [0, 1]$. Hva er trådens masse hvis dens massetetthet er gitt ved $\delta(x, y, z) = xyz$?

$\boxed{3}$ Regn ut

$$\frac{2}{3}\int_\Gamma x\, ds$$

der Γ er den delen av skjæringskurven mellom den elliptiske sylinderen

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{9} = 1$$

og planet $x = 4z$ som ligger i første oktant ($x \geq 0$, $y \geq 0$ og $z \geq 0$).

Det oppgis at

$$\int 2\sqrt{1+u^2}\, du = u\sqrt{1+u^2} + \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) + C.$$

$\boxed{4}$ La vektorfeltet $\mathbf{F}$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(6y, 6x, 8z^2\right)$ for $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

a) Avgjør om $\mathbf{F}$ er konservativt.

b) La C være kurven parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = \left(\cos(t), \sin(t), t\right)$ for $t \in [0, \pi]$. Regn ut

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

c) Regn også ut

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r},$$

der $\mathbf{H}(x, y, z) = (0, x, 0)$ for $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

d) Bruk resultatene ovenfor til å finne verdien til

$$\int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r},$$

der $\mathbf{G}(x, y, z) = \left(6y, 5x, 8z^2\right)$ for $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.