TMA4105 Matematikk 2

Interaktiv forelesning uke 7

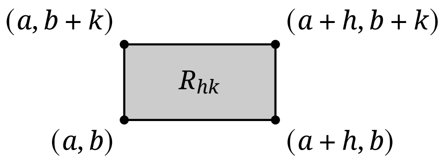
Våren 2024

Alternativ for MTFYMA

$\boxed{2}$ I denne oppgaven får vi bruk for middelverdisetningen for dobbeltintegraler.

> **Teorem (Middelverdisetningen)**
>
> La $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon, og $F \subseteq \mathbb{R}^2$ en lukket, begrenset og sammenhengende mengde. Da eksisterer det et punkt $(x_0, y_0) \in F$ slik at
>
> $$\iint_F f(x, y)\, dA = f(x_0, y_0) \cdot \text{Areal}(F).$$

Anta nå at $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon. For et punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ og to tall $h, k > 0$, lar vi R_{hk} være følgende rektangel i $\mathbb{R}^2$.



a) Vis at antagelsene i middelverdisetningen gjelder for integralet $\iint_{R_{hk}} f(x, y)\, dA$. Hva kan vi konkludere med da?

b) Bevis at

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{hk} \iint_{R_{hk}} f(x, y)\, dA = f(a, b).$$