TMA4105 Matematikk 2

Interaktiv forelesning uke 6

Våren 2024

Alternativ for MTFYMA

3 I denne oppgaven skal vi (nesten) bevise ett av tilfellene i annenderiverttesten.

Teorem (Annenderiverttesten)

La f være en funksjon av to variable. Anta at $(a, b) \in D_f$ er indre kritisk punkt, og at de annenderiverte av f er kontinuerlige nær (a, b). Sett

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b), \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b),$$

og

$$\Delta = AC - B^2.$$

Da har vi at

(1) hvis $\Delta < 0$ er (a, b) et sadelpunkt.

(2) hvis $\Delta > 0$ og $A > 0$ er (a, b) et lokalt minimumspunkt.

(3) hvis $\Delta > 0$ og $A < 0$ er (a, b) et lokalt maksimumspunkt.

La f og (a, b) være som i teoremet. Fikser en $\theta \in [0, 2\pi]$ og definer en funksjon g_θ (av en variabel) ved formelen

$$g_\theta(r) = f\big(a + r\cos(\theta), b + r\sin(\theta)\big).$$

a) Bruk kjerneregelen til å uttrykke $g_\theta'(0)$ og $g_\theta''(0)$ ved hjelp av A, B, C og θ.

b) Anta nå at $\Delta > 0$ og at $A > 0$. Vis at $g_\theta''(0) > 0$ uavhengig av θ. Hva forteller dette oss om oppførselen til f nær (a, b)?