TMA4105 Matematikk 2

Interaktiv forelesning uke 3

Våren 2024

$\boxed{1}$ Vis at ellipsen beskrevet av

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{der} \quad a > b > 0,$$

har størst krumning i punktene $(\pm a, 0)$ og minst krumning i punktene $(0, \pm b)$.

$\boxed{2}$ Har kurven gitt ved

$$x(t) = 4t^3, \quad y(t) = 3t - \sin(3t)$$

for $t \in \mathbb{R}$ en veldefinert tangent i origo?

Finn i så fall stigningstallet til tangenten.

$\boxed{3}$ La C være skjæringskurven i $\mathbb{R}^3$ mellom sylinderen $x^2 + z^2 = 1$ og planet $z = 2 - y$.

Vis at

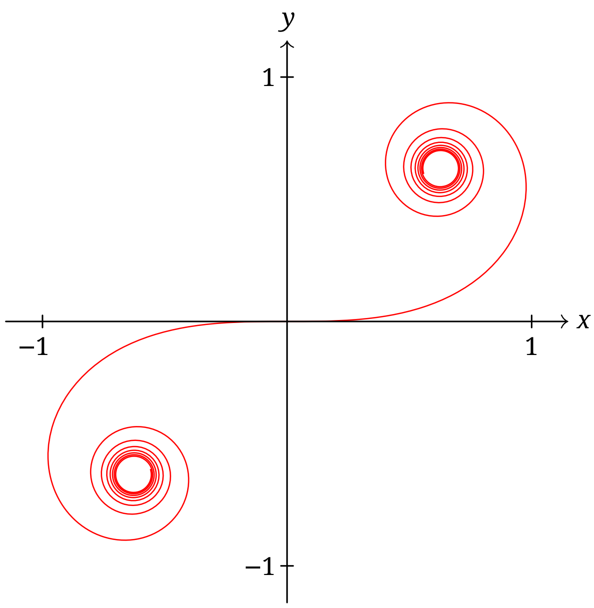
$$\mathbf{r}(t) = \big(\cos(t), 2 - \sin(t), \sin(t)\big), \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

er en gyldig parametrisering av C. Bruk denne til å finne et uttrykk for krumningen κ til C som funksjon av parameteren t.

$\boxed{4}$ La C være kurven i planet gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \left(\int_0^t \cos(u^2)\,du, \int_0^t \sin(u^2)\,du\right)$$

for $t \in \mathbb{R}$.



Kurven C er kjent som *Eulers spiral*. En av egenskapene til Eulers spiral er et krumningen i et punkt på kurven er proporsjonal med buelengden fra origo til punktet.

Vis at dette stemmer ved å regne ut $s(t)$ og $\kappa(t)$ for alle $t \ge 0$, der $s(t)$ er buelengden fra origo og $\kappa(t)$ er krumningen i punktet $\mathbf{r}(t)$.