TMA4105 Matematikk 2

Interaktiv forelesning uke 15

Våren 2024

1 Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (8x + 8x^3 z, -2x^2 y - 2yz^2, -12x^2 z^2 - 8y^2 z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Finn området T i $\mathbb{R}^3$ slik at

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

er størst mulig, der ∂T er randen til T og $\hat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen til ∂T som peker ut av T.

2 La T være området i $\mathbb{R}^3$ som er avgrenset av flatene

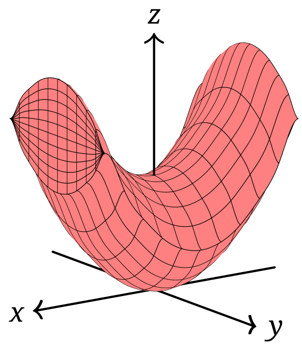
$$z = 1 + x^2 - y^2 \quad \text{og} \quad z = x^2 + y^2$$

og planene

$$x = 1 \quad \text{og} \quad x = -1,$$

og la $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \big(0, e^x + y, 0\big).$$



a) Regn ut

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

der ∂T er randen (overflaten) til T og $\hat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalvektoren til ∂T som peker ut av T.

b) Randen ∂T består av fire flater: de to plane flatestykkene $\mathcal{P}_1$ (i planet $x = 1$) og $\mathcal{P}_2$ (i planet $x = -1$) og de to krumme flatestykkene $\mathcal{S}_1$ (øverst) og $\mathcal{S}_2$ (nederst).
Regn ut

$$\iint_{\mathcal{P}_i} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS \quad \text{og} \quad \iint_{\mathcal{S}_i} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

for $i = 1, 2$, der $\hat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalvektoren til de forskjellige flatene som peker ut av T.

3 Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad \text{for} \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

La $\mathcal{S}$ være kuleflaten med sentrum i $(0, 0, 0)$ og radius 1.

a) Vis at $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = 0$, for $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

b) Vis at

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = -4\pi,$$

der $\hat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen som peker ut av kulen.

c) Forklar hvorfor resultatene i **a)** og **b)** ikke er i strid med divergensteoremet.