TMA4105 Matematikk 2

Interaktiv forelesning uke 12

Våren 2024

Alternativ for MTFYMA

$\boxed{1}$ Vi skal se på den såkalte strømfunksjonen Ψ til et divergensfritt vektorfelt.

La $\mathbf{F} = (P, Q)$ være et glatt divergensfritt vektorfelt,

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad \text{over} \quad \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

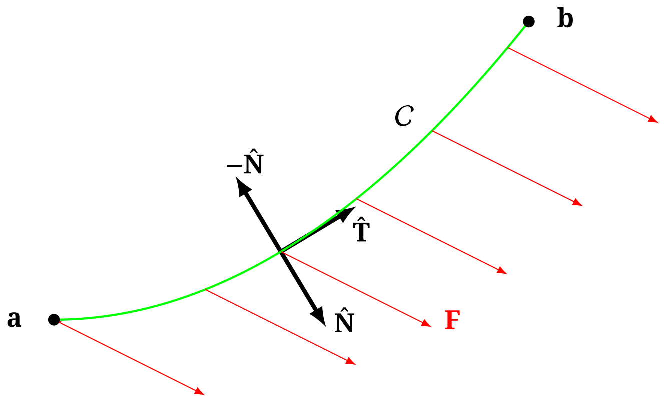
der $\mathcal{D}$ er et enkeltsammenhengende område.

a) Vis at vektorfeltet $\mathbf{G} = (G_1, G_2) = (-Q, P)$ er konservativt.

b) La $\mathbf{r}\colon [0,1] \to \mathcal{D}$ parametrisere en vilkårlig glatt kurve C, med $\mathbf{r}(0) = \mathbf{a}$ og $\mathbf{r}(1) = \mathbf{b}$, der $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$. Vi ser på fluksintegralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, ds$$

der $\hat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen som peker mot øst, hvis tangentvektoren $\hat{\mathbf{T}}$ peker nord.



$$\mathbf{r} = (x(t), y(t))$$

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{(x'(t), y'(t))}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

Vis at

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, ds = \Psi(\mathbf{b}) - \Psi(\mathbf{a}),$$

der Ψ er potensialfunksjonen til $\mathbf{G}$.

c) Gi en fysisk tolkning av $\Psi(\mathbf{b}) - \Psi(\mathbf{a})$. Hvis $\mathbf{r}$ parametriserer en lukket kurve i $\mathcal{D}$ og $\mathbf{F}$ er divergensfritt, hva blir

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, ds$$

ifølge resultatet i **b)**? Kommenter svaret.

Mer om strømfunksjonen

Selv om vi ikke viste det over, har strømfunksjonen den egenskapen at den er konstant på *strømlinjene* til vektorfeltet. En strømlinje $\mathbf{r} = (x(t), y(t))$ til vektorfeltet $\mathbf{F} = (P, Q)$ er en kurve der tangenten er gitt av feltet $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$. På komponentform skriver vi

$$\dot{x} = P(x, y), \qquad \dot{y} = Q(x, y).$$

Hvis vi ser på strømfunksjonen definert langs strømlinjen $t \mapsto \Psi(\mathbf{r}(t))$, ser vi ved kjerneregelen at

$$\frac{d}{dt}(\Psi(x(t), y(t))) = \dot{x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial \Psi}{\partial y} = P\frac{\partial \Psi}{\partial x} + Q\frac{\partial \Psi}{\partial y} = P(-Q) + QP = 0,$$

der vi har brukt at Ψ er potensialfunksjonen til $\mathbf{G} = (-Q, P)$. Dette viser at Ψ er konstant langs strømlinjer. Vi ser videre fra **b)** at $|\Psi(\mathbf{b}) - \Psi(\mathbf{a})|$ er volumstrømmen mellom strømlinjene, som henholdsvis går gjennom punktene **a** og **b**.