TMA4105 Matematikk 2

Interaktiv forelesning uke 12

Våren 2024

$\boxed{1}$ Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(4x^2y^2, -9yz^2, 3z^3x^2\right), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

ikke har et vektorpotensial, altså at det ikke finnes noe vektorfelt $\mathbf{G}$ slik at

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{curl} \mathbf{G}(x, y, z)$$

for alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$\boxed{2}$ La $\mathcal{S}_r$ være kuleflaten med sentrum i origo og radius r, og la vektorfeltet $\mathbf{F}$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 0)$. La $\hat{\mathbf{N}}$ være enhetsnormalen til $\mathcal{S}_r$ som peker utover. La $V(r)$ være volumet innenfor $\mathcal{S}_r$, og definer funksjonen $f(r)$ ved

$$f(r) = \oiint_{\mathcal{S}_r} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

Finn et uttrykk for $f(r)$, og bestem grenseverdien

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{f(r)}{V(r)}.$$

Sammenlign denne grenseverdien med en fysisk fortolkning av divergensen til $\mathbf{F}$.

$\boxed{3}$ La R være området i $\mathbb{R}^2$ som tilfredsstiller ulikhetene $x^2 + y^2 \leq 1$ og $y \geq 0$, og la $C = \partial R$ være randen til R orientert mot klokken. Regn ut

$$\int_{C'} \left(xy + \cos\left(\frac{x}{2}\right), 4x + e^{y^2} + 3\arctan(y)\right) \cdot d\mathbf{r},$$

der C' er den krumme delen av C.

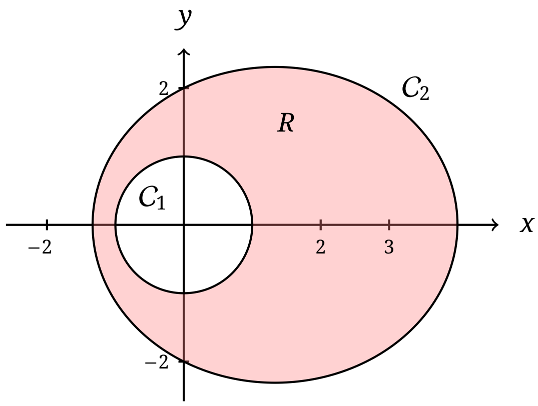
$\boxed{4}$ La C_1 være sirkelen

$$x^2 + y^2 = 1,$$

og la C_2 være kurven med ligning

$$r(\theta) = \frac{4}{2 - \cos(\theta)}, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

i polarkoordinater. Videre så er både C_1 og C_2 orientert mot klokken.



La R være området mellom C_1 og C_2.

Bruk Greens teorem til å regne ut

$$\oint_{C_2} \left(-\frac{y}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{x}{(x^2 + y^2)^2}\right) \cdot d\mathbf{r}.$$

Det oppgis at

$$\oint_{C_1} \left(-\frac{y}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{x}{(x^2 + y^2)^2}\right) \cdot d\mathbf{r} = 2\pi \qquad \text{og} \qquad \iint_R \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}\, dA = \frac{23}{32}\pi.$$