TMA4105 Matematikk 2

Skriftlig innlevering 4

Våren 2024

Innleveringsfrist: 19. april 2024, kl. 16.00.

$\boxed{1}$ La $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(xe^{2z}, ye^{2z}, -e^{2z}\right)$.

Vis at $\mathbf{F}$ er divergensfritt, og bestem to ulike vektorpotensial til $\mathbf{F}$. Det vil si, bestem to vektorfelt $\mathbf{G}$ og $\mathbf{H}$, $\mathbf{G} \neq \mathbf{H}$, som er slik at $\operatorname{curl} \mathbf{G}(x, y, z) = \operatorname{curl} \mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)$.

$\boxed{2}$ La D være området gitt ved $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$.

a) Bestem verdien av dobbeltintegralet

$$I = \iint_D \frac{y}{(4 + x^2 + y^2)^2}\, dA.$$

b) La $\mathcal{C}_1$ være det rette linjestykket langs x-aksen fra origo til punktet $(2, 0)$ orientert mot høyre. Regn ut linjeintegralet

$$\int_{\mathcal{C}_1} \frac{x-1}{4 + x^2 + y^2}\, dx + \frac{y}{4 + x^2 + y^2}\, dy.$$

c) Forklar ut fra resultatene i **a)** og **b)** og ved å bruke Greens teorem hvorfor

$$\int_{\mathcal{C}_2} \frac{x-1}{4 + x^2 + y^2}\, dx + \frac{y}{4 + x^2 + y^2}\, dy = 0,$$

der $\mathcal{C}_2$ er halvsirkelbuen $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$.

$\boxed{3}$ Vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z)$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{ye^z}{1 + x^2 + y^2}, -\frac{xe^z}{1 + x^2 + y^2}, -e^{x^2+y^2}\right).$$

La T være legemet som er avgrenset av de tre flatene S_1, S_2 og S_3 der S_1 er sirkelskiva $x^2 + y^2 \leq 1$ i xy-planet, S_2 er den delen av sylinderen $x^2 + y^2 = 1$ som ligger over xy-planet og under flata S_3 gitt ved

$$z = f(x, y) = e^x \ln(3 - x^2 - y^2), \qquad x^2 + y^2 \leq 1.$$

De tre flatene til sammen danner randa til T, ∂T.

a) Finn

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

når $\hat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalvektoren til ∂T som peker ut av T.

b) Finn

$$\iint_{S_i} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}_i\, dS$$

for $i = 1, 2$ og 3, der $\hat{\mathbf{N}}_i$ er enhetsnormalvektoren til S_i som peker ut av T.

$\boxed{4}$ La $\mathcal{C}$ være skjæringskurven mellom de to paraboloidene gitt ved

$$z = 5 - (x+2)^2 - y^2$$

og

$$z = x^2 + y^2 + 1,$$

og la $\mathcal{C}$ være orientert mot klokken sett ovenfra.

Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der $\mathbf{F}$ er vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(z^2 - yz, 2yz + e^y, xy + y^2\right).$$

(Vink: Vis at $\mathcal{C}$ ligger i planet $z = 1 - 2x$ og bruk deretter Stokes' teorem.)