TMA4105 Matematikk 2

Skriftlig innlevering 3

Våren 2024

Innleveringsfrist: 15. mars 2024, kl. 16.00.

$\boxed{1}$ Legemet T består av alle punkter (x, y, z) i $\mathbb{R}^3$ som tilfredsstiller

$$0 < x^2 + y^2 + z^2 < 2\sqrt{x^2 + y^2}, \qquad |z| \leq \sqrt{x^2 + y^2},$$

og har en massetetthet som er omvendt proporsjonal med avstanden til origo kvadrert. Skisser T og regn ut massen.

$\boxed{2}$ La S være området gitt i sylinderkoordinater ved

$$(r - 2)^2 + z^2 \leq 1.$$

Skisser området og regn ut volumet av S.

$\boxed{3}$ La C være skjæringskurven mellom sylinderen

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

og planet

$$x - 3y + 2z - 6 = 0.$$

Finn en parameterfremstilling for C og regn ut linjeintegralet

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der $\mathbf{F}$ er vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (-z, x, 0)$.

$\boxed{4}$ Vektorfeltet $\mathbf{G}_a(x, y, z)$ er gitt ved

$$\mathbf{G}_a(x, y, z) = \left(ye^{xy}\cos(z), xe^{xy}\cos(z), 3 + 3ae^{xy}\sin(z)\right)$$

der $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ og a er et reelt tall.

a) Bestem en verdi for a slik at vektorfeltet blir konservativt, og finn en potensialfunksjon for $\mathbf{G}_a$ i dette tilfellet.

b) Regn ut linjeintegralet

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{G}_a \cdot d\mathbf{r}$$

med a lik den verdien du fant i **a)**, og der $\mathcal{D}$ er kurven med parameterfremstilling

$$\mathbf{r}(t) = \left(\ln(1 + t), \arccos(t^2), t^2\right), \qquad 0 \leq t \leq 1.$$