

Anbefalte oppgaver uke 10

Våren 2023

Oppgaver til plenumsregning

1 Bestem strømningslinjene til vektorfeltet gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} - y\mathbf{j} = (x^2, -y)$.

2 Regn ut linjeintegralet

$$\int_C (x + y) ds$$

der C er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (2t, 3t, -t), \quad 0 \leq t \leq 2.$$

3 Finn massen til vieren som følger kurven

$$\mathbf{r}(t) = (3t, 3t^2, 2t^3), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

dersom massetettheten i $\mathbf{r}(t)$ er $1 + t$ gram per enhetslengde.

4 La vektorfeltet \mathbf{F} være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}$, og kurven C være gitt ved $x = t$, $y = t^2$ og $z = t^3$ fra $(0, 0, 0)$ til $(1, 1, 1)$. Regn ut

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

5 Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y) = (x + y + 4x^3y^3, y^3 + x + 3x^4y^2)$$

er konservativt. Regn ut

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der C er kurven gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (2e^t \cos(t), 2e^t \sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Oppgaver med løsningsforslag

1 Skisser vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ i planet og bestem dets feltlinjer.

2 Avgjør om vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}.$$

er konservativt, og hvis ja, finn en tilhørende potensialfunksjon.

3 Samme som i 2, men med vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy - z^2)\mathbf{i} + (2yz + x^2)\mathbf{j} - (2zx - y^2)\mathbf{k}.$$

4 Finn det 3-dimensjonale vektorfeltet med potensial

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}.$$

- 5] Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{2x}{z}\mathbf{i} + \frac{2y}{z}\mathbf{j} - \frac{x^2 + y^2}{z^2}\mathbf{k}$$

er konservativt og finn en potensialfunksjon til denne. Beskriv ekvipotensialflatene og finn feltlinjene.

- 6] Regn ut $\int_C y \, ds$ der C er gitt ved $\mathbf{r}(t) = (t^2, t, t^2)$, der $0 \leq t \leq m$.

- 7] La C være den delen av skjæringskurven mellom cylinderen $x^2 + y^2 = a^2$ og planet $z = x$ som ligger i første oktant. Regn ut $\int_C x \, ds$.

- 8] Regn ut de lukkede kurveintegralene

a) $\oint_C x \, dy$,

b) $\oint_C y \, dx$,

langs C gitt som randen av den øvre halvdissen $x^2 + y^2 \leq a^2$, $y \geq 0$, orientert mot klokken.