

Anbefalte oppgaver uke 8

Våren 2023

Oppgaver til plenumsregning

- 1 For hvilke verdier av k konvergerer integralet nedenfor? Hvis det konvergerer, regn det også ut.

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^k} dA.$$

- 2 La R være området avgrenset av $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ og $x + y = 4$. Regn ut

$$\iint_R \frac{1}{x+y} dx dy$$

ved å gjøre variabelskiftet $x = u - uv$ og $y = uv$.

- 3 Regn ut det itererte integralet

$$\int_0^1 \int_z^1 \int_0^y \cos(y^3) dx dy dz.$$

- 4 La P være parallelogrammet avgrenset av $y = 2x$, $y = 2x - 2$, $y = x$ og $y = x + 1$. Regn ut

$$\iint_P xy dx dy$$

ved å gjøre et passende variabelskifte.

Oppgaver med løsningsforslag

- 1 Regn ut dobbeltintegralet

$$\iint_Q y dA$$

der Q er kvartdisken gitt ved $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $x^2 + y^2 \leq a^2$.

- 2 Definer gjennomsnittverdien til en integrerbar funksjon $f(x, y, z)$ over et område R i rommet. Finn så gjennomsnittverdien til $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ over kubens $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ og $0 \leq z \leq 1$.

- 3 Bruk dobbeltintegraler for å utlede de kjente formlene for volumet av:

- a) En sylinder med høyde h og radius r .
- b) En kule med radius R .
- c) En kjegle med høyde h og radius r .

- 4] Bruk polarkoordinater som variabelskifte og transformasjonsformelen for to variabler til å utlede arealformelen for et område innesluttet av en polarkurve $r = f(\theta)$ som du lærte i uke 2. Bruk tilsvarende idé med bruk av variabelskifte til å finne arealet innesluttet av ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

- 5] (Sommeren 2010, oppgave 3.) Et dobbeltintegral blir ved iterert integrasjon

$$I = \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{y(1+x^2)}} = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{1}{\sqrt{y(1+x^2)}} dx \right) dy.$$

- a) Skisser området D og beregn integralet I ved å bytte om integrasjonsrekkefølgen.
- b) Regn ut integralet I ved å benytte variabelskiftet $(u, v) \mapsto (u, u^2v) = (x, y)$. Vis først at området D i xy -planet tilsvarer området R i uv -planet bestemt av ulikhetene $0 \leq u \leq 1$ og $0 \leq v \leq 1$. Det oppgis at

$$dx dy = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right\| du dv.$$

- 6] (Våren 2016, oppgave 7.) La D være området i første kvadrant (det vil si $x \geq 0$ og $y \geq 0$) som er avgrenset av ellipsene $4x^2 + y^2 = 16$ og $4x^2 + y^2 = 1$. Skisser området D og regn ut

$$\iint_D \frac{x}{4x^2 + y^2} dA.$$

- 7] (Våren 2015, oppgave 8.) Området D er avgrenset av kurvene gitt ved $y^2 - x^2 = 1$, $y^2 - x^2 = 4$, $x = -y/2$ og $x = y/2$ for $y > 0$. Finn en variabelsubstitusjon som transformerer D til et rektangel, og bruk denne til å regne ut

$$\iint_D \frac{y^2 - x^2}{y^2} dA.$$

Vink: Regningen blir kanskje enklere om du uttrykker $du dv$ ved $dx dy$ enn om du gjør det omvendt.