

Anbefalte oppgaver uke 4

Våren 2023

Oppgaver til plenumsregning

1 Identifiser flaten representert ved ligningen $y = z^2$ og skisser den.

2 Gitt

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - x^3 y^3}{x^2 + y^2}$$

for $(x, y) \neq 0$, bestem $f(0, 0)$ slik at f er kontinuerlig i hele planet.

3 Finn alle førsteordens partielle deriverte til

$$f(x, y) = \sin(x\sqrt{y})$$

og evaluer disse i punktet $(\pi/3, 4)$.

4 Anta at $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ er kontinuerlig deriverbare av andre orden. Vi sier at u og v tilfredsstillers **Cauchy–Riemann ligningene** hvis

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Vis at hvis u og v tilfredsstillers Cauchy–Riemann ligningene, så er begge harmoniske: det vil si, $\Delta u = \Delta v = 0$ der Laplace-operatoren Δ er gitt ved (i kartesiske koordinater): $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ for en (glatt nok) funksjon $f = f(x, y)$.

5 Betrakt den kvadratiske flaten gitt ved $z = x^2 + 2y^2$.

a) Hva slags kurver får vi for z lik konstant?

b) Hva slags kurver får vi for y lik konstant?

c) Hva slags kurver får vi for x lik konstant?

d) Hva slags flate er dette? Skisser den?

e) Finn ligningen til tangentplanet i et punkt (a, b, c) på flaten. Hva blir ligningen for $a = 2$, $b = 1$?

Oppgaver med løsningsforslag

1 Identifiser flaten representert ved ligningen $x^2 + 4z^2 = 4$ og skisser den.

2 Finn alle førsteordens partielle deriverte til

$$w = \ln(1 + e^{xyz})$$

og evaluer disse i punktet $(2, 0, -1)$.

- 3 Finn alle førsteordens partielle deriverte til

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

og evaluer disse i punktet $(-3, 4)$.

- 4 Finn alle andreordens partielle deriverte til

$$z = x^2(1 + y^2).$$

- 5 Vis at funksjonen

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

er harmonisk i hele planet untatt i origo.