TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 16

Våren 2023

Oppgaver til plenumsregning

1 La C være kurven gitt ved $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$ og la C være orientert mot klokken sett fra positiv y-akse. Regn ut

$$\oint_C (4z + e^{\cos(x)})\, dx + y^4\, dy + (x + 2y)\, dz.$$

2 Regn ut

$$\oint_C y^2\, dx + xy\, dy + xz\, dz$$

der C er skjæringskurven mellom sylinderen $x^2 + y^2 = 2y$ og planet $y = z$ og C er orientert mot klokken sett ovenfra.

3 La $\mathcal{S}$ være en flate som oppfyller betingelsene til Stokes' teorem, med rand C. La $\mathbf{F}$ være et konstant vektorfelt. Vis at

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

ved hjelp av Stokes' teorem.

4 La $\mathcal{S}$ være den delen av paraboloiden $z = 9 - x^2 - y^2$ som ligger over xy-planet med normal $\hat{\mathbf{N}}$ som har positiv z-komponent. La C være den positivt orienterte randen til $\mathcal{S}$. Regn ut

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

der $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x^2, z)$.

5 Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \big(x\cos(y^2), z - x^2 y \sin(y^2), y\big)$$

a) Finn $\operatorname{curl}\mathbf{F}$.

b) Bestem

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der C er kurven med parametrisering

$$\mathbf{r}(t) = \big(\sin(t), \sin(2t), t(\pi - 2t)\big), \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Oppgaver med løsningsforslag

1 (Sommeren 2020, oppgave 9.) Gitt tre punkter $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0)$ og $P_3 = (0, 0, 2)$ og vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(-\tfrac{1}{2}z(x + y), z\left(y - \tfrac{1}{2}x\right), \tfrac{1}{2}y(y - x)\right).$$

La C være kurven som består av de tre rette linjestykkene som forbinder P_1, P_2 og P_3, orientert mot urviseren sett fra punktet $(1,1,1)$. Regn ut

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

2 (Våren 2019, oppgave 10.)

La C være skjæringskurven mellom de to paraboloidene gitt ved $z = 10 - (x-1)^2 - y^2$ og $z = (x+2)^2 + y^2 + 1$, og la C være orientert mot klokken sett ovenfra.

Du kan bruke uten bevis at projeksjonen av C i xy-planet er gitt ved

$$x^2 + x + y^2 = 2$$

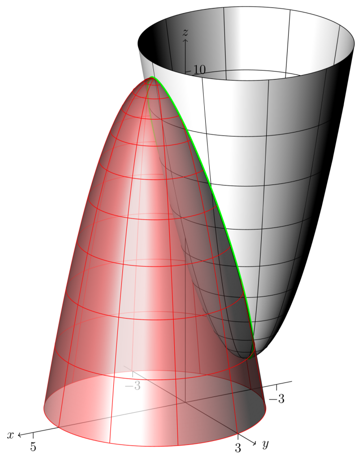
som også kan skrives som

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}.$$

Vis at C ligger i planet $z = 3x + 7$.

Regn ut

$$\oint_C (2z - yz)\, dx + (\cos(y) + z)\, dy + (x^2 + z^2 + xy)\, dz.$$



3 (Sommeren 2018, oppgave 8.) Gitt et vektorfelt $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xz, 0, (x-1)^2)$ og tre punkter $P_1 = (1,0,0)$, $P_2 = (0,1,0)$ og $P_3 = (0,0,2)$ i $\mathbb{R}^3$. La T være tetraederet («pyramiden») med hjørner i P_1, P_2, P_3 og $(0,0,0)$, og la $\hat{\mathbf{N}}$ være enhetsnormalvektoren på overflaten ∂T som peker ut av T.

a) Bestem

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

b) Finn $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$ og regn ut

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der C er den lukkede kurven orientert mot klokken sett ovenfra som består av linjestykkene P_1P_2, P_2P_3 og P_3P_1.

4 (Våren 2018, oppgave 8.) Regn ut

$$\oint_C y^2\, dx + xy\, dy + xz\, dz,$$

der C er skjæringskurven mellom sylinderen $x^2 + y^2 = 2y$ og planet $y = z$ og C er orientert mot klokken sett ovenfra.

5 (Sommeren 2016, oppgave 9.) La vektorfeltet $\mathbf{F}$ være gitt ved $\mathbf{F}(x,y,z) = (-x, 0, 2x+z)$.

a) Vis at $\mathbf{F}$ har et vektorpotensial $\mathbf{G}$, det vil si $\mathbf{F} = \operatorname{curl}\mathbf{G}$, på formen

$$\mathbf{G}(x, y, z) = (0, H(x, y, z), 0),$$

for et skalarfelt H.

b) La $\mathcal{S}$ være flaten gitt ved $z = x^2 + y^2 + x - 3$, der $x^2 + y^2 \leq 3$. Regn ut

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS,$$

der $\hat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen som peker oppover.
(Vink: Bruk **a)** sammen med Stokes' teorem.)

$\boxed{6}$ (Våren 2016, oppgave 8.)

La $\mathcal{S}$ være flaten gitt ved $z = x^2$, for $0 \leq x \leq 2$ og $0 \leq y \leq 1$. La vektorfeltet $\mathbf{F}$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^y, e^z, e^x)$. Regn ut

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der $\partial\mathcal{S}$ er randen til $\mathcal{S}$, og der $\partial\mathcal{S}$ er orientert mot klokken sett ovenfra.