Anbefalte oppgaver uke 13

Våren 2023

Oppgaver til plenumsregning

$\boxed{1}$ Finn fluksen til $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2, y^2 - z^2, z)$ gjennom kuleflaten med sentrum i origo og radius 3.

$\boxed{2}$ Finn fluksen til $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ gjennom overflaten til sylinderen gitt ved

$$x^2 + y^2 \leq 2y, \quad 0 \leq z \leq 4.$$

$\boxed{3}$ La D være et regulært legeme i $\mathbb{R}^3$, og la $\mathcal{S}$ være overflaten til D med $\hat{\mathbf{N}}$ normalen som peker utover. Vis at for alle glatte vektorfelt $\mathbf{F}$ så er

$$\oint\!\!\!\oint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}(\mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = 0.$$

$\boxed{4}$ Regn ut

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS,$$

der

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(5x^2 + ye^y, 3y^2, z\right),$$

der $\mathcal{S}$ er den øvre halvsfæren definert av $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, og enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ har positiv $\mathbf{k}$-komponent.

$\boxed{5}$ Et legeme R som tilfredsstiller antagelsene i divergensteoremet med har konstant massetetthet, volum V og massesenter i $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Finn fluksen til

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(x^2 - x - 2y, 2y^2 + 3y - z, z^2 - 4z + xy\right)$$

ut av overflaten til R uttrykt ved V og $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Oppgaver med løsningsforslag

$\boxed{1}$ Vis at fluksen til et konstant vektorfelt gjennom en lukket glatt og orientert flate i rommet alltid er 0.

$\boxed{2}$ Finn fluksen til $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$ gjennom sfæren med sentrum i origo og radius $a > 0$.

$\boxed{3}$ La D være et legeme i $\mathbb{R}^3$ som tilfredstiller antagelsene i divergensteoremet og la $\mathcal{S}$ være overflaten til D med $\hat{\mathbf{N}}$ den utadvendte normalen. Vis at volumet til D er gitt ved

$$V = \frac{1}{3} \oint\!\!\!\oint_{\mathcal{S}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

Kan vi erstatte integranden med et annet vektorfelt og kontstanten 1/3 med noe annet?

4 La D være et legeme i $\mathbb{R}^3$ som tilfredstiller antagelsene i divergensteoremet og la $\mathcal{S}$ være overflaten til D med $\hat{\mathbf{N}}$ den utadvendte normalen. La φ og ψ være to glatte skalarfelt og la $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ betegne den retningsderiverte til φ i retningen av $\hat{\mathbf{N}}$. Vis at

$$\iiint_D \Delta\varphi \, dV = \oiint_{\mathcal{S}} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \, dS,$$

der $\Delta\varphi = \nabla^2\varphi$ er laplaceoperatoren anvendt på φ.

5 Samme antagelser som i oppgave 4. Vis nå at (dette er en såkalt *Green type formel*):

$$\iiint_D (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi) \, dV = \oiint_{\mathcal{S}} \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) dS.$$

6 Samme antagelser som i oppgave 5. Vis at

$$\iiint_D \nabla\varphi \, dV = \oiint_{\mathcal{S}} \varphi\hat{\mathbf{N}} \, dS$$

ved å anvende divergensteoremet på $\mathbf{F} = \varphi\mathbf{c}$ der $\mathbf{c}$ er et vilkårlig konstant vektorfelt.

7 (Sommeren 2003, oppgave 6.) La T være legemet avgrenset av de to flatene

$$S_1: \quad z = x^2 + 3y^2 \qquad \text{og} \qquad S_2: \quad z = 9 - 3x^2 - y^2,$$

og la

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} + y\mathbf{k}.$$

a) Finn massen til T når massetettheten er $\delta(x, y, z) = x^2$.

b) La D_1 være den delen av overflaten til T som ligger på S_1, og la D_2 være den delen av overflaten til T som ligger på S_2. Beregn

$$\iint_{D_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}} \, dS$$

når det er kjent at

$$\iint_{D_2} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}} \, dS = \frac{2187\pi}{256}$$

og $\hat{\mathbf{N}}$ er den utadrettede enhetsnormalen til overflaten av T.

8 (Våren 1998, oppgave 5.)

a) La $\mathbf{F}$ være et vektorfelt med kontinuerlige partiellderiverte, definert i hele rommet. La S og S' være to orienterte, stykkevis glatte flater med felles positivt orientert randkurve C, der C er en orientert, enkel, lukket og stykkevis glatt kurve i rommet.

Gjør rede for at hvis $\nabla\cdot\mathbf{F} = 0$ så er

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}} \, dS = \iint_{S'} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}} \, dS.$$

(Du kan anta at flatene S og S' bare skjærer hverandre langs randkurven C.)

b) I en elv spennes opp et nett som har form som en flate S med ligning

$$y = (1 - x^2)(1 - z^2) \qquad \text{for } -1 \le x \le 1, -1 \le z \le 1.$$

Vannstrømmen er gitt ved hastighetsfeltet

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \left(\cos^2(x)\sin(z)\cos(z), \left(\frac{\pi^2}{4} - x^2\right)\left(\frac{\pi}{2} + z\right), -\sin(x)\cos(x)\cos^2(z)\right).$$

Hvor mange volumenheter vann renner gjennom nettet per tidsenhet (det vil si, hvor stor er fluksen til vektorfeltet $\mathbf{v}$ gjennom S i retning av enhetsnormalen med positiv $\mathbf{j}$-komponent)?

$\boxed{9}$ (Sommeren 2000, oppgave 6.)

La C være sirkelen $x^2 + y^2 = 1$, orientert mot urviseren. La videre

$$f(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \qquad \text{og} \qquad g(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Vis at

$$\oint_C f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy = 2\pi$$

ved å regne ut linjeintegralet direkte.

La R være området begrenset av sirkelen C. Forklar hva som er galt med følgende resonnement, og hvorfor:

«Ved Greens teorem har vi

$$\oint_C f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dA = 0.»$$