

Anbefalte oppgaver uke 12

Våren 2023

Oppgaver til plenumsregning

- 1 La \mathbf{F} være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2, -yz^2, zx^2).$$

Finn $\operatorname{div} \mathbf{F}$, $\operatorname{curl} \mathbf{F}$ og $\operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{F})$.

- 2 Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y) = (x + y + 4x^3y^3, y^3 + x + 3x^4y^2)$$

er konservativt.

- 3 Finn et vektorpotensial for

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (3xy^2z, 4xz - y^3z, 1).$$

- 4 Bestem

$$\oint_C (x \sin(y^2) - y^2, x^2y \cos(y^2) + 3x) \cdot d\mathbf{r},$$

der C er randen til trapeset med hjørner $(0, -2)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ og $(0, 2)$, orientert mot klokken.

- 5 Bruk Greens teorem til å beregne arealet av ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Oppgaver med løsningsforslag

- 1 Anta uendelig glatthet for alle involverte funksjoner f og vektorfelt \mathbf{F} . Vis at vi da alltid har:

$$\begin{aligned} \operatorname{curl}(\operatorname{grad}(f)) &= \mathbf{0} \\ \operatorname{div}(\operatorname{curl}(\mathbf{F})) &= 0. \end{aligned}$$

- 2 Finn divergensen og curl til $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$.

- 3 Finn divergensen og curl til $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r, \theta) = r\mathbf{i} + \sin(\theta)\mathbf{j}$, der (r, θ) er polarkoordinater.

- 4 La \mathbf{F} være et glatt to-dimensjonelt vektorfelt. Hvis C_ε er sirkelen med radius ε sentrert i origo og $\hat{\mathbf{N}}$ er den utadpekende enhetsnormalen til C_ε , vis at

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \oint_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} ds = \operatorname{div}(\mathbf{F})(0, 0).$$

- 5 La $\mathbf{r} = (x, y, z)$ og la $r = |\mathbf{r}|$. Anta at f er en deriverbar funksjon av én variabel. Vis at

$$\nabla \cdot (f(r)\mathbf{r}) = rf'(r) + 3f(r).$$

Finn $f(r)$ hvis $f(r)\mathbf{r}$ er divergensfritt.

- 6 (Sommeren 2016, oppgave 7.) La C være randen til firkanten med hjørner i $(-2, 1)$, $(-2, -3)$, $(1, 0)$ og $(1, 7)$, der C er orientert mot urviseren.

Regn ut

$$\int_C xy \, dx + 2x \, dy.$$

- 7 (Våren 2012, oppgave 5.)

- a) Ligningen $4x^2 + 24x + 9y^2 = 0$ beskriver en ellipse. Finn senteret til ellipsen, samt lengden til den store og lille halvaksen, og skisser ellipsen.
- b) Den rette linjen $y = \frac{-2}{\sqrt{3}}x$ deler ellipsen i to deler. La C være den korteste av disse delene, orientert fra høyre mot venstre. Finn

$$\int_C -y \, dx + x \, dy.$$

(Vink: Parametriseringen $x = 3 \cos(t) - 3$, $y = 2 \sin(t)$ kan brukes.)

- c) Regn ut arealet avgrenset av C og linja $y = \frac{-2}{\sqrt{3}}x$.
(Hint: Greens teorem kan brukes.)