

Anbefalte oppgaver uke 11

Våren 2023

Oppgaver til plenumsregning

- 1 Finn en parametrisering av hyperboloiden

$$x^2 + y^2 - z^2 = 25.$$

- 2 Finn den totale ladningen på flaten

$$\mathbf{r}(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v, u),$$

der $0 \leq u \leq 1$ og $0 \leq v \leq \pi$, når ladningstettheten er gitt ved $\delta = \sqrt{1 + e^{2u}}$.

- 3 Finn fluksen til $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, y, z)$ opp gjennom flaten

$$\mathbf{r}(u, v) = (u^2v, uv^2, v^3),$$

der $0 \leq u \leq 1$ og $0 \leq v \leq 1$.

- 4 La S være den delen av paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ som ligger over planet $2x + z = 1$. Vi orienterer S ved å velge enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ slik at den peker oppover (med andre ord: $\hat{\mathbf{N}}$ skal ha positiv z -komponent). Finn fluksen gjennom S av vektorfeltet $\mathbf{F} = \mathbf{k}$, det vil si, regn ut integralet

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS.$$

- 5 La $\hat{\mathbf{N}}$ være den utadpekende enhetsnormalen til en glatt, orientert og lukket flate S i rommet. Vis at fluksen til $\hat{\mathbf{N}}$ ut av S er arealet av S .

Oppgaver med løsningsforslag

- 1 Verifiser at flateelementet (arealelementet) dS til kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ er gitt i kulekoordinater ved $dS = a^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta$.

- 2 Finn $\iint_S x \, dS$ over den delen av den paraboliske sylinderen $z = x^2/2$ som ligger inne i første oktant av sylinderen $x^2 + y^2 = 1$.

- 3 Finn $\iint_S y \, dS$ der S er den delen av planet $z = 1 + y$ som ligger inne i kjeglen $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$.

- 4 Finn $\iint_S xz \, dS$ der S er den delen av flaten $z = x^2$ som ligger i første oktant inne i paraboloiden $z = 1 - 3x^2 - y^2$.

- 5 Finn fluksen til $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + z\mathbf{j}$ ut av tetraederet begrenset av koordinatplanene og planet $x + 2y + 3z = 6$.

- 6 (Våren 2004, oppgave 3.) La S være flaten bestemt ved

$$z = 2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}, \quad z \geq 0.$$

Skisser S , og beregn fluksen opp gjennom S av vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2)\mathbf{i} + (3x^2y + y^3 - x^3)\mathbf{j} + (z + 1)\mathbf{k}.$$

7 (Sommeren 2009, oppgave 4.) La S være den delen av flaten

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

som ligger i første oktant, under planet $z = 2$.

Beregn arealet av S .