

TMA4105 MATEMATIKK 2

Oversiktsforelesning 9 Vektorfelt og linjeintegraler

Rune Haugseng
Institutt for matematiske fag, NTNU

6. mars 2023

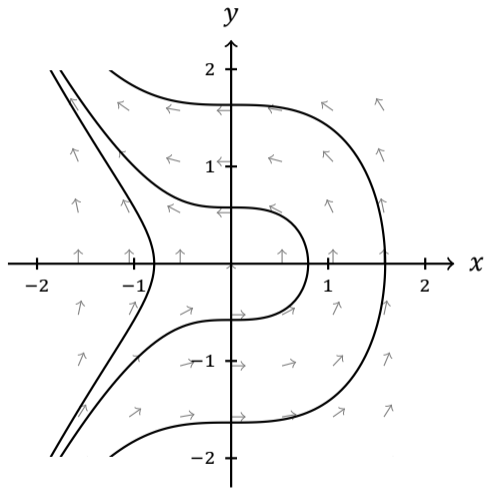


Kunnskap for en bedre verden

Nøkkelbegreper

- ▶ Vektorfelt
- ▶ Konservative vektorfelt
- ▶ Linjeintegraler for funksjoner (skalarfelt)
- ▶ Linjeintegraler for vektorfelt

Strømningslinjer



Eksempel (potensialfunksjon)

Finn en potensialfunksjon for vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xye^{x^2}, e^{x^2}, z)$$

for $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Partiellderiverte for konservativt vektorfelt

Teorem

Anta at

- ▶ D er et åpent område i \mathbb{R}^n ,
- ▶ $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$ er et konservativt vektorfelt på D ,
- ▶ alle komponentene F_i er kontinuerlige og har kontinuerlige første ordens partiellderiverte.

Da har vi

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

for alle $i \neq j$.

Eksempel (linjeintegral av funksjon)

Finn linjeintegralet

$$\int_C f(x, y, z) ds$$

der

$$f(x, y, z) = xz$$

og C er kurven parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (2t^3, 3\sqrt{2}t^2, 6t)$$

for $t \in [0, 1]$.

Konservative vektorfelt og linjeintegraler

Teorem 16.1

Anta at \mathbf{F} er et glatt vektorfelt på et åpent område $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Da er følgende utsagn ekvivalente:

(1) \mathbf{F} er konservativt på D .

(2) For $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in D$ og C, C' to glatte orienterte kurver fra \mathbf{p} til \mathbf{q} i D har vi

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

(Linjeintegralet av \mathbf{F} er uavhengig av veien fra \mathbf{p} til \mathbf{q} i D .)

(3) For enhver lukket glatt kurve C i D har vi

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Eksempel (linjeintegral av konservativt vektorfelt)

Finn linjeintegralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

av vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xye^{x^2}, e^{x^2}, z)$$

langs kurven C parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

for $t \in [0, \pi]$.

Figurer

- ▶ <https://www.geogebra.org/m/QPE4PaDZ> (Vektorfelt)
- ▶ <https://earth.nullschool.net> (Vind)