



NTNU

Norwegian University of  
Science and Technology

# TMA4105 MATEMATIKK 2

Oversiktsforelesning 8  
Multiple integraler III

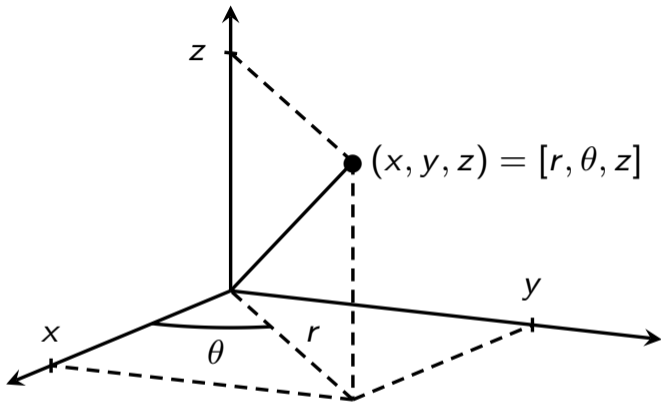
Sigrid Grepstad  
Institutt for matematiske fag, NTNU

27. februar 2023

# Nøkkelbegreper

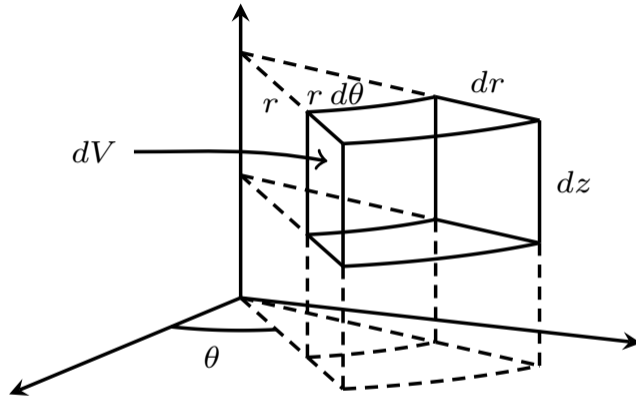
- ▶ Variabelskifte for trippelintegraler
  - ▶ sylinderkoordinater og kulekoordinater
  - ▶ gjennom alminnelige transformasjoner (Jacobi-matrise, Jacobi-determinant)
- ▶ Massesenter

# Sylinderkoordinater



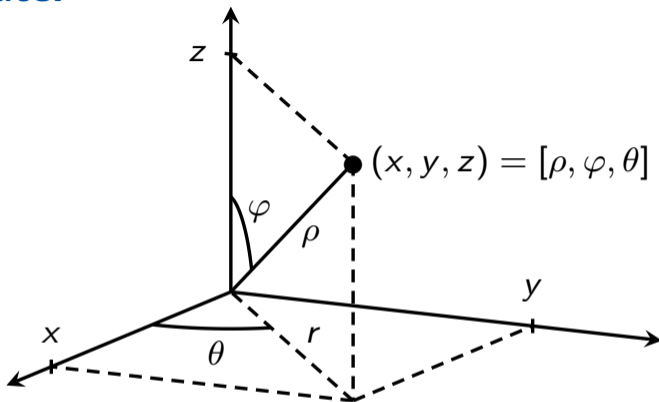
$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z$$

# Volumelement iylinderkoordinater



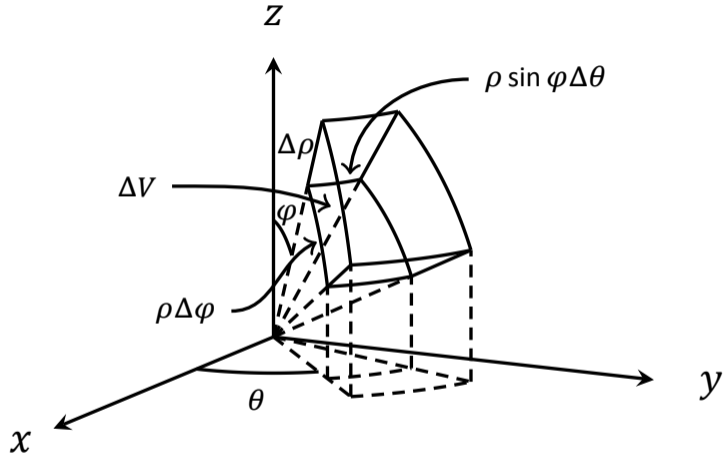
$$dV = r dz dr d\theta$$

# Kulekoordinater



$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta \quad z = \rho \cos \varphi$$

# Volumelement i kulekoordinater



$$dV = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

## Variabelbytte i trippelintegral

La  $T$  være en én-entydig transformasjon fra et område  $S$  i  $uvw$ -rommet til et område  $D$  i  $xyz$ -rommet, gitt ved

$$T(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)).$$

Anta at  $x(u, v, w)$ ,  $y(u, v, w)$  og  $z(u, v, w)$  og deres 1. ordens partiellderiverte er kontinuerlige på  $S$ . Hvis  $f(x, y, z)$  er integrerbar på  $D$ , og

$$g(u, v, w) = (f \circ T)(u, v, w) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

så er

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_S g(u, v, w) |J(u, v, w)| du dv dw,$$

der Jacobi-determinanten er

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

# Masse og massesenter

**Massen** av et romlig legeme  $T$  med **massetetthetsfunksjon**  $\delta = \delta(x, y, z)$  er gitt ved

$$m = \iiint_T dm = \iiint_T \delta(x, y, z) dV, \quad dm = \delta dV.$$

**Massesenteret** til  $T$  er punktet  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  i  $\mathbb{R}^3$ , hvor

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iiint_T x dm, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iiint_T y dm, \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \iiint_T z dm.$$

Dersom  $\delta(x, y, z) = 1$ , så kalles punktet  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  **sentroiden** til  $T$ .



# Figurer i math3d.org

- ▶ Eksempel sylinderkoordinater: <https://www.math3d.org/BQSUJbs8o>
- ▶ Flater gitt i sylinderkoordinater: <https://www.math3d.org/alrHPPKhJ>
- ▶ Kulekoordinater: <https://www.math3d.org/81U2oTXaa>
- ▶ Flater gitt i kulekoordinater: <https://www.math3d.org/chlkqiXB6>