

TMA4105 MATEMATIKK 2

Oversiktsforelesning 7 Multiple integraler II

Rune Haugseng
Institutt for matematiske fag, NTNU

20. februar 2023



Kunnskap for en bedre verden

Nøkkelbegreper

- ▶ Variabelskifte for dobbeltintegraler
 - ▶ Jacobideterminanten
 - ▶ Dobbeltintegraler i polarkoordinater
- ▶ Trippelintegraler

Variabelskifte for dobbeltintegraler

Teorem 14.4

Anta at

- ▶ $T: S \rightarrow D$, $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, er én-én-tydig ($S, D \subseteq \mathbb{R}^2$),
- ▶ $x(u, v)$ og $y(u, v)$ er kontinuerlige med kontinuerlige partiellderiverte på S ,
- ▶ $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ er integrerbar.

Da er funksjonen

$$g(u, v) = f(T(u, v)) = f(x(u, v), y(u, v))$$

integrerbar på S , og

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_S g(u, v) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Eksempel (variabelskifte)

Finn

$$\iint_D f(x, y) dA$$

der D er området avgrenset av de fire kurvene

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{3}{x}, \quad y = \frac{x}{2}, \quad y = 2x,$$

og

$$f(x, y) = \frac{x}{y}.$$

Eksempel (polarkoordinater)

Finn integralet

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-y}^y \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy$$

ved å bytte til polarkoordinater.

Trippelintegraler

- ▶ Trippelintegralet defineres igjen som en grenseverdi av Riemann-summer:

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i,j,k} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V_{ijk}$$

der $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k$.

Trippelintegraler

- ▶ Trippelintegralet defineres igjen som en grenseverdi av Riemann-summer:

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i,j,k} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V_{ijk}$$

der $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k$.

- ▶ Tilsvarende egenskaper som dobbeltintegralet.

Trippelintegraler

- ▶ Trippelintegralet defineres igjen som en grenseverdi av Riemann-summer:

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i,j,k} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V_{ijk}$$

der $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k$.

- ▶ Tilsvarende egenskaper som dobbeltintegralet.
- ▶ $\iiint_D dV = \text{volum}(D)$.

Trippelintegraler

- ▶ Trippelintegralet defineres igjen som en grenseverdi av Riemann-summer:

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i,j,k} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V_{ijk}$$

der $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k$.

- ▶ Tilsvarende egenskaper som dobbeltintegralet.
- ▶ $\iiint_D dV = \text{volum}(D)$.
- ▶ For $f(x, y, z) \geq 0$ er $\iiint_D f(x, y, z) dV$ geometrisk et 4-dimensjonalt "hypervolum"

Trippelintegraler

- ▶ Trippelintegralet defineres igjen som en grenseverdi av Riemann-summer:

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i,j,k} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V_{ijk}$$

der $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k$.

- ▶ Tilsvarende egenskaper som dobbeltintegralet.
- ▶ $\iiint_D dV = \text{volum}(D)$.
- ▶ For $f(x, y, z) \geq 0$ er $\iiint_D f(x, y, z) dV$ geometrisk et 4-dimensjonalt "hypervolum"
- ▶ Mange andre fortolkninger, f.eks. er massen til et legeme $D \subseteq \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$m = \iiint_D \rho(x, y, z) dV$$

der $\rho(x, y, z)$ er tettheten til legemet i punktet (x, y, z) .

Itererte integraler

For $D = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x), e(x, y) \leq z \leq f(x, y)\}$ har vi

$$\iiint_D F(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{e(x,y)}^{f(x,y)} F(x, y, z) dz dy dx$$

og tilsvarende for andre rekkefølger av koordinatene.

Itererte integraler

For $D = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x), e(x, y) \leq z \leq f(x, y)\}$ har vi

$$\iiint_D F(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{e(x,y)}^{f(x,y)} F(x, y, z) dz dy dx$$

og tilsvarende for andre rekkefølger av koordinatene.

For $D = \{(x, y, z) : (x, y) \in D', a(x, y) \leq z \leq b(x, y)\}$ har vi

$$\iiint_D F(x, y, z) dV = \int_{D'} \int_{a(x,y)}^{b(x,y)} F(x, y, z) dz dA.$$

Eksempel (trippelintegral 1)

Finn volumet avgrenset av flatene

$$y = x^2, \quad z = 0, \quad y + z = 1.$$

Eksempel (trippelintegral 2)

Finn volumet avgrenset av de elliptiske paraboloidene

$$z = x^2 + 2y^2, \quad z = 12 - 2x^2 - y^2.$$

Eksempel (trippelintegral 3)

Regn ut integralet

$$I = \int_0^1 \int_z^1 \int_0^x e^{x^3} dy dx dz$$

ved å endre integrasjonsrekkefølgen.

Figurer

- ▶ <https://www.math3d.org/wVgggtINuz> (Eksempel trippelintegral 1)
- ▶ <https://www.math3d.org/CDvbgA7v7> (Eksempel trippelintegral 2)
- ▶ <https://www.math3d.org/p4rzCagBf> (Eksempel trippelintegral 3)