TMA4105 MATEMATIKK 2

Oversiktsforelesning 6
Multiple integraler I

Rune Haugseng
Institutt for matematiske fag, NTNU

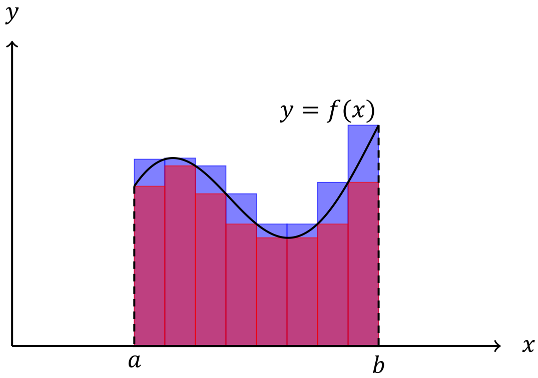
13. februar 2023

NTNU | Kunnskap for en bedre verden

Nøkkelbegreper

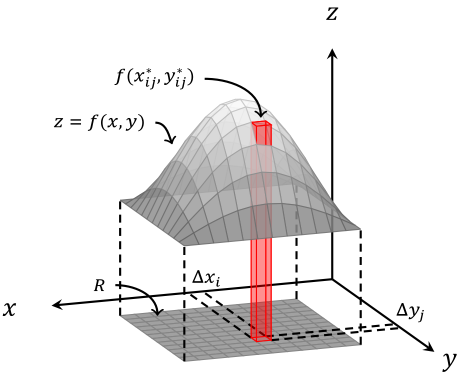
- Dobbeltintegraler
  - Riemann-summer
  - Egenskaper til dobbeltintegraler
- Enkle (x-enkle, y-enkle) integrasjonsområder
- Itererte integraler
- Bytte av integrasjonsrekkefølge
- Uegentlige integraler for funksjoner med konstant fortegn
- Middelverdier for funksjoner av flere variabler

Riemann-summer i én variabel



Riemann-sum: $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$
(Sum av arealer av bokser)

Riemann-summer i to variabler



Riemann-sum: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)\, \Delta x_i\, \Delta y_j$
(Sum av volumer av stolper)

Eksistens av dobbeltintegraler

Teorem 15.1
Anta at

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$ er lukket og begrenset,
- randen av D består av endelig mange kontinuerlige kurver av endelig lengde,
- $f : D \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig.

Da er f også integrerbar på D: dobbeltintegralet $\iint_D f(x, y)\, dA$ eksisterer.

Egenskaper til dobbeltintegraler

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ lukket og begrenset

(1) $\displaystyle\iint_D dA = \text{areal}(D)$

(2) Hvis $\text{areal}(D) = 0$, så er $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dA = 0$ for alle f.

(3) Hvis f er integrerbar på D og $f(x,y) \geq 0$ for $(x,y) \in D$, så er

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \text{volum}(X),$$

der $X \subseteq \mathbb{R}^3$ er legemet som ligger mellom grafen $z = f(x,y)$ og D (i xy-planet).

(4) Hvis $D = D_1 \cup \cdots \cup D_k$ der $D_1, D_2, \ldots, D_k$ er ikke-overlappende mengder og f er integrerbar på alle D_i, så er f integrerbar på D og

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \sum_{i=1}^{k} \iint_{D_i} f(x,y)\,dA.$$

Itererte integraler

Teorem 15.2

Anta at

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$ er lukket og begrenset,
- $f : D \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig.

(1) Hvis D er y-enkel, $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \quad c(x) \leq y \leq d(x)\}$, har vi

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

(2) Hvis D er x-enkel, $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \quad a(y) \leq x \leq b(y)\}$, har vi

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Eksempel

Finn

$$\iint_D f(x, y)\, dA$$

der D er området mellom grafene $y = x^2$ og $y = x$, og

$$f(x, y) = x^2 y.$$

Eksempel

Regn ut integralet

$$I = \int_0^2 \int_{y^2}^4 \cos x^{3/2} \, dx \, dy$$

ved å bytte integrasjonsrekkefølgen.

Eksempel (ubegrenset område)

Finn

$$\iint_D f(x, y)\, dA$$

der D er området angitt av ulikhetene $x \geq 0$ og $0 \leq y \leq x$ og

$$f(x, y) = ye^{-x}.$$

Eksempel (ubegrenset integrand)

La D være trekanten i planet med hjørner $(0,0)$, $(1,0)$ og $(1,1)$. Avgjør om integralet

$$\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\,dA$$

eksisterer.

Eksempel (middelverdi)

La D være trekanten i planet med hjørner $(0, 0)$, $(0, 1)$ og $(2, 0)$.
Tykkelsen til en metallplate over D er gitt ved funksjonen

$$f(x, y) = xy + 1.$$

Hva er den gjennomsnittlige tykkelsen til platen?

Middelverdisetningen

I én variabel: Hvis $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig så finnes det $x_0 \in [a, b]$ slik at

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Teorem 15.3

Hvis $D \subseteq \mathbb{R}^2$ er lukket, begrenset og sammenhengende, og $f : D \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig, så finnes det et punkt $(x_0, y_0) \in D$ slik at

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{\text{areal}(D)} \iint_D f(x, y)dA.$$