TMA4105 MATEMATIKK 2

Oversiktsforelesning 5
Ekstremalverdier for funksjoner av flere variabler

Rune Haugseng
Institutt for matematiske fag, NTNU

6. februar 2023

NTNU | Kunnskap for en bedre verden

Nøkkelbegreper

- (Lokale/globale) maksimums- og minimumspunkter for funksjoner av flere variabler
- Kritiske punkter for funksjoner av flere variabler
- Sadelpunkter for funksjoner av flere variabler
- Singulære punkter for funksjoner av flere variabler
- Nødvendige betingelser for ekstremalverdier
- Ekstremalverdisetningen
- Annenderiverttesten i to variabler
- Lagranges multiplikatormetode

Ekstremalpunkter

Teorem 14.1

Hvis $\mathbf{x}$ er et ekstremalpunkt for $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$), så er $\mathbf{x}$ enten

- et kritisk punkt for f,
- eller et singulært punkt for f,
- eller et randpunkt av D.

Eksempel (ekstremalpunkter)

Finn maksimumsverdien av funksjonen

$$f(x, y) = 20 + \frac{8xy}{1 + x^2 + y^2}$$

for $x^2 + y^2 \leq 4$.

Ekstremalverdisetningen

Teorem 14.2
Hvis

- $D \subseteq \mathbb{R}^n$ er lukket og begrenset
- og $f : D \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig

så har f globale maksimums- og minimumspunkter i D.

Annenderiverttesten

Teorem 14.3 (i $\mathbb{R}^2$)

La (a, b) være et kritisk punkt for funksjonen $f\colon D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^2$). Anta at

- (a, b) er et indre punkt i D,
- alle andreordens partiellderiverte av f eksisterer og er kontinuerlige i en omegn av (a, b).

Annenderiverttesten

Teorem 14.3 (i $\mathbb{R}^2$)

La (a, b) være et kritisk punkt for funksjonen $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^2$). Anta at

- (a, b) er et indre punkt i D,
- alle andreordens partiellderiverte av f eksisterer og er kontinuerlige i en omegn av (a, b).

Vi setter: $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(a, b)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$,

$$\Delta = AC - B^2 = \det\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ B & C \end{smallmatrix}\right).$$

Annenderiverttesten

Teorem 14.3 (i $\mathbb{R}^2$)

La (a, b) være et kritisk punkt for funksjonen $f\colon D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^2$). Anta at

- (a, b) er et indre punkt i D,
- alle andreordens partiellderiverte av f eksisterer og er kontinuerlige i en omegn av (a, b).

Vi setter: $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(a, b)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$,

$$\Delta = AC - B^2 = \det \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Hvis

- $\Delta < 0$ er (a, b) et sadelpunkt,
- $\Delta > 0$ og $A > 0$ er (a, b) et lokalt minimumspunkt,
- $\Delta > 0$ og $A < 0$ er (a, b) et lokalt maksimumspunkt.

Annenderiverttesten

Teorem 14.3 (i $\mathbb{R}^2$)

La (a,b) være et kritisk punkt for funksjonen $f\colon D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^2$). Anta at

- (a,b) er et indre punkt i D,
- alle andreordens partiellderiverte av f eksisterer og er kontinuerlige i en omegn av (a,b).

Vi setter: $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(a,b)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$,

$$\Delta = AC - B^2 = \det\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Hvis

- $\Delta < 0$ er (a,b) et sadelpunkt,
- $\Delta > 0$ og $A > 0$ er (a,b) et lokalt minimumspunkt,
- $\Delta > 0$ og $A < 0$ er (a,b) et lokalt maksimumspunkt.

(Hvis $\Delta = 0$ kan vi ikke si noe.)

Eksempel (annenderiverttesten)

Klassifisér de kritiske punktene til funksjonen

$$f(x, y) = 3xe^{y} - x^{3} - e^{3y}.$$

Lagranges multiplikatormetode med én bibetingelse

Teorem 14.4
La C være kurven definert av ligningen $g(x, y) = 0$ og anta at (a, b) er et lokalt ekstremalpunkt for funksjonen f langs C. Hvis

- f og g begge har kontinuerlige partiellderiverte i en omegn av (a, b),
- (a, b) ikke er et av endepunktene til C,
- $\nabla g(a, b) \neq \mathbf{0}$,

så finnes det $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at

$$\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b).$$

Eksempel (Lagrange-multiplikatorer)

Finn punktene på hyperbelen $xy = 3$ nærmest origo.

Figurer

- https://www.math3d.org/FMZ2kkdb (typer ekstremalpunkter)
- https://www.math3d.org/yJbEJEh2 (eksempel)
- https://www.math3d.org/tjEZVk6B (eksempel)
- https://www.math3d.org/kGFAAyUy (eksempel Lagrange-multiplikator)