

TMA4105 MATEMATIKK 2
Oversiktsforelesning 2
Vektorvaluerte funksjoner av én variabel

Rune Haugseng
Institutt for matematiske fag, NTNU

16. januar 2023



Kunnskap for en bedre verden

Nøkkelbegreper

- ▶ Vektorvaluerte funksjoner av én variabel
 - ▶ Deriverbarhet
 - ▶ Derivasjonsregler: produktregler og kjederegelen

- ▶ Kurver gitt ved vektorvaluert funksjon
 - ▶ Glatte kurver
 - ▶ Enhetstangentvektor og enhetsnormalvektor
 - ▶ Buelengden til kurver
 - ▶ Krumning til kurver

Regneregler for derivasjon

Teorem 12.1

La $\mathbf{u}, \mathbf{v}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ være to vektorvaluerte funksjoner, og $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}, \mu: J \rightarrow I$ være skalarfunksjoner, alle deriverbare. Da har vi:

(a) $\frac{d}{dt} (\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t).$

(b) $\frac{d}{dt} (\lambda(t)\mathbf{u}(t)) = \lambda'(t)\mathbf{u}(t) + \lambda(t)\mathbf{u}'(t).$

(c) $\frac{d}{dt} (\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t).$

(d) $\frac{d}{dt} (\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t).$ (Kun for $n = 3!$)

(e) $\frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mu(t)) = \mu'(t)\mathbf{u}'(\mu(t)).$

(f) $\frac{d}{dt} |\mathbf{u}(t)| = \frac{1}{|\mathbf{u}(t)|} (\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}'(t)),$ gitt at $\mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}.$

Eksempel (parametrisering)

Vis at de to funksjonene

$$\mathbf{r}_1(u) = (2 \cos u, 2 \sin u), \quad 0 \leq u \leq \pi,$$

$$\mathbf{r}_2(t) = (-t, \sqrt{4 - t^2}), \quad -2 \leq t \leq 2,$$

parametriserer den samme kurven i \mathbb{R}^2 .

Eksempel (buelengdeparametrisering)

Finn buelengdeparametriseringen $\mathbf{r}(s)$ for den parametriserte kurven

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{1+t^2}(1-t^2, 2t), t \geq 0.$$

Figurer

▶ <https://www.math3d.org/JNAn6I1r>

▶ <https://www.math3d.org/AwEgumL1>