TMA4105 MATEMATIKK 2

Oversiktsforelesning 14
Repetisjon

Rune Haugseng
Institutt for matematiske fag, NTNU

24. april 2023

Kurver

V22, oppgave 5

La

$$\mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t, \sqrt{3} \cdot t)$$

for $t \geq 0$ være en parametrisering av kurven $\mathcal{C}$.

- Finn buelengdeparametriseringen av $\mathcal{C}$.
- Finn deretter krumningen til $\mathcal{C}$ som funksjon av buelengden.

Kurver

V22, oppgave 5

La

$$\mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t, \sqrt{3} \cdot t)$$

for $t \geq 0$ være en parametrisering av kurven $\mathcal{C}$.

- Finn buelengdeparametriseringen av $\mathcal{C}$.
- Finn deretter krumningen til $\mathcal{C}$ som funksjon av buelengden.

Buelengde: $s(T) = \int_0^T |\mathbf{r}'(t)| \, dt$

Kurver

V22, oppgave 5

La
$$\mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t, \sqrt{3} \cdot t)$$
for $t \geq 0$ være en parametrisering av kurven $\mathcal{C}$.

- Finn buelengdeparametriseringen av $\mathcal{C}$.
- Finn deretter krumningen til $\mathcal{C}$ som funksjon av buelengden.

Buelengde: $s(T) = \int_0^T |\mathbf{r}'(t)| \, dt$

Krumning: $\kappa = \dfrac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3} = \dfrac{|\widehat{\mathbf{T}}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$

Kontinuitet

V22, oppgave 4

Avgjør om funksjonen

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

er kontinerlig i origo. (Er den deriverbar?)

Kontinuitet

V22, oppgave 4

Avgjør om funksjonen

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

er kontinerlig i origo. (Er den deriverbar?)

Grenser i 2 variabler: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{r\to 0^+} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$

hvis *uavhengig* av θ (ellers eksisterer grensen ikke!)

Deriverbarhet

- $f(x, y)$ er *deriverbar* i $(0, 0)$ hvis $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ eksisterer i $(0, 0)$ og

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - x\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - y\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Deriverbarhet

- $f(x, y)$ er *deriverbar* i $(0, 0)$ hvis $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ eksisterer i $(0, 0)$ og
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - x\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - y\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$
- Geometrisk tolkning: grafen til f har et tangentplan over $(0, 0)$.

Deriverbarhet

- $f(x,y)$ er *deriverbar* i $(0,0)$ hvis $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ eksisterer i $(0,0)$ og

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

- Geometrisk tolkning: grafen til f har et tangentplan over $(0,0)$.
- Hvis $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ eksisterer og er kontinuerlige i en *omegn* av $(0,0)$ så *er* f deriverbar i $(0,0)$.

Deriverbarhet

- $f(x,y)$ er *deriverbar* i $(0,0)$ hvis $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ eksisterer i $(0,0)$ og
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$
- Geometrisk tolkning: grafen til f har et tangentplan over $(0,0)$.
- Hvis $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ eksisterer og er kontinuerlige i en *omegn* av $(0,0)$ så *er* f deriverbar i $(0,0)$.
- Hvis f er deriverbar er den retningsderiverte
$$D_{\mathbf{u}}f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb) - f(0,0)}{h}$$
i en retning $\mathbf{u} = (a,b)$ gitt ved
$$D_{\mathbf{u}}f(0,0) = \mathbf{u}\cdot\nabla f(0,0) = a\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + b\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$
(Så hvis dette ikke stemmer er f *ikke* deriverbar.)

Flateintegral

S21, oppgave 7

Finn arealet av den delen av flaten

$$x = y^2 + z^2$$

som ligger mellom planene $x = 1$ og $x = 4$ ved å regne ut et flateintegral.

Flateintegral

S21, oppgave 7

Finn arealet av den delen av flaten

$$x = y^2 + z^2$$

som ligger mellom planene $x = 1$ og $x = 4$ ved å regne ut et flateintegral.

Flateintegral av funksjon:

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y)\, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du\, dv$$

($\mathcal{S}$ parametrisert ved $\mathbf{r}\colon\ D \to \mathbb{R}^3$.)

Trippelintegral

S22, oppgave 4

Finn massen til legemet avgrenset av flatene $z = x^2 + y^2$ og $z = 4$, der massetettheten til legemet er

$$\delta(x, y, z) = 2z.$$

Trippelintegral

S22, oppgave 4

Finn massen til legemet avgrenset av flatene $z = x^2 + y^2$ og $z = 4$, der massetettheten til legemet er

$$\delta(x, y, z) = 2z.$$

Sylinderkoordinater:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z$$

$$dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

Stokes' teorem

S22, oppgave 10

La S være den delen av kuleskallet $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$ som ligger over planet $z = 0$, og la vektorfeltet $\mathbf{F}$ være gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xe^x, 2x + y^4, z + x \sin y).$$

Finn $\operatorname{curl} \mathbf{F}$, og regn ut $\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS$ der $\widehat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalvektoren på S som peker utover.

Stokes' teorem

S22, oppgave 10

La S være den delen av kuleskallet $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$ som ligger over planet $z = 0$, og la vektorfeltet $\mathbf{F}$ være gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xe^x, 2x + y^4, z + x \sin y).$$

Finn $\operatorname{curl} \mathbf{F}$, og regn ut $\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS$ der $\widehat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalvektoren på S som peker utover.

Stokes' teorem:

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der kurven $\mathcal{C}$ er randen til flaten $\mathcal{S}$, positivt orientert for $\widehat{\mathbf{N}}$

Divergensteoremet

V22, oppgave 8

La **F** være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3).$$

Bruk divergensteoremet til å bestemme $\iint_S \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} \, dS$ der S er kuleflaten gitt ved ligningen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, og $\widehat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen på S som peker utover.

Divergensteoremet

V22, oppgave 8

La **F** være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3).$$

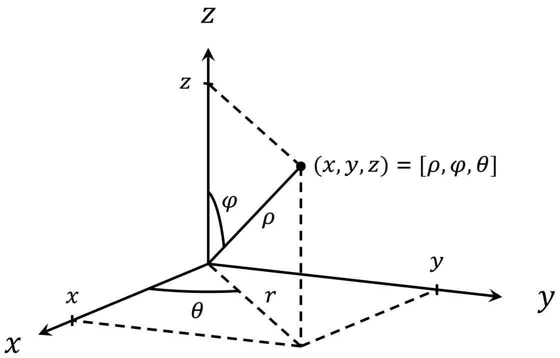
Bruk divergensteoremet til å bestemme $\iint_S \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS$ der S er kuleflaten gitt ved ligningen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, og $\widehat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen på S som peker utover.

Divergensteoremet:

$$\iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS$$

der flaten $\mathcal{S}$ er randen til området $\mathcal{D}$ og $\widehat{\mathbf{N}}$ peker utover

Kulekoordinater



$$x = \rho \sin\phi\, \cos\theta \qquad y = \rho \sin\phi\, \sin\theta \qquad z = \rho \cos\phi$$

$$dx\, dy\, dz = \rho^2 \sin\phi\, d\theta\, d\phi\, d\rho$$

Vektorfelt og linjeintegraler

V22, oppgave 3

La **F** være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x - z \sin y, \cos y).$$

Vis at **F** er konservativt ved å finne en tilhørende potensialfunksjon. Regn deretter ut

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der $\mathcal{C}$ er kurven gitt ved parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin^2 t, t), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Konservative vektorfelt

- $\mathbf{F}$ er *konservativt* hvis det finnes en *potensialfunksjon* ϕ slik at

$$\mathbf{F} = \nabla \phi.$$

Konservative vektorfelt

- **F** er *konservativt* hvis det finnes en *potensialfunksjon* ϕ slik at

$$\mathbf{F} = \nabla \phi.$$

- Hvis **F** er konservativt har vi $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Konservative vektorfelt

- $\mathbf{F}$ er *konservativt* hvis det finnes en *potensialfunksjon* ϕ slik at
$$\mathbf{F} = \nabla \phi.$$
- Hvis $\mathbf{F}$ er konservativt har vi $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$.
- Hvis $\mathbf{F}$ er glatt og definert på et enkeltsammenhengende område er $\mathbf{F}$ konservativt hvis og bare hvis $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Konservative vektorfelt

- $\mathbf{F}$ er *konservativt* hvis det finnes en *potensialfunksjon* ϕ slik at
$$\mathbf{F} = \nabla \phi.$$
- Hvis $\mathbf{F}$ er konservativt har vi $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$.
- Hvis $\mathbf{F}$ er glatt og definert på et enkeltsammenhengende område er $\mathbf{F}$ konservativt hvis og bare hvis $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$.
- Et glatt vektorfelt $\mathbf{F}$ er konservativt hvis og bare hvis linjeintegralet av $\mathbf{F}$ langs en glatt kurve bare avhenger av endepunktene:
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{q}) - \phi(\mathbf{p})$$
hvis $\mathcal{C}$ er en kurve fra $\mathbf{p}$ til $\mathbf{q}$ og $\mathbf{F} = \nabla \phi$.

Vektorpotensial

S22, oppgave 8

Avgjør om hvert av de følgende vektorfeltene har et vektorpotensial, og gi et eksempel dersom det eksisterer:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, (y - x)^2, -2yz + z), \quad \mathbf{G}(x, y, z) = (x^2, (y - x)^2, -2yz).$$

Vektorpotensial

S22, oppgave 8

Avgjør om hvert av de følgende vektorfeltene har et vektorpotensial, og gi et eksempel dersom det eksisterer:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, (y-x)^2, -2yz + z), \quad \mathbf{G}(x, y, z) = (x^2, (y-x)^2, -2yz).$$

Vektorpotensial: $\mathbf{F} = \operatorname{curl} \mathbf{H}$

Vektorpotensial

S22, oppgave 8

Avgjør om hvert av de følgende vektorfeltene har et vektorpotensial, og gi et eksempel dersom det eksisterer:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, (y - x)^2, -2yz + z), \quad \mathbf{G}(x, y, z) = (x^2, (y - x)^2, -2yz).$$

Vektorpotensial: $\mathbf{F} = \operatorname{curl} \mathbf{H}$

Hvis **F** har et vektorpotensial må vi ha

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$$

(og omvendt hvis definisjonsområdet ikke har “hull”)

Tangentplan

V22, oppgave 2

Finn en ligning for tangentplanet i punktet (a, b, c) på ellipsoiden

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 1.$$

Finn deretter punktene hvor tangentplanet er parallelt med planet $x + y + z = 0$.

Tangentplan

V22, oppgave 2

Finn en ligning for tangentplanet i punktet (a, b, c) på ellipsoiden

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 1.$$

Finn deretter punktene hvor tangentplanet er parallelt med planet $x + y + z = 0$.

Tangentplan for flaten $f(x, y, z) = 0$ **gjennom p:**

$$\nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0.$$

(Gradienten er normal til nivåflaten.)

Variabelskifte i dobbeltintegral

S22, oppgave 3

La D være området i første kvadrant av planet avgrenset av kurvene $y = x^2$, $y = 2x^2$, $xy = 1$ og $xy = 4$. Regn ut

$$\iint_D y^3 \, dA.$$

Variabelskifte i dobbeltintegral

S22, oppgave 3

La D være området i første kvadrant av planet avgrenset av kurvene $y = x^2$, $y = 2x^2$, $xy = 1$ og $xy = 4$. Regn ut

$$\iint_D y^3 \, dA.$$

Variabelskifte:

$$du\,dv = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| dx\,dy$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

Greens teorem

S22, oppgave 7

La $\mathcal{C}$ være ellipsen gitt ved ligningen $x^2 + (y/3)^2 = 1$, orientert mot klokken. Bruk Greens teorem til å finne $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, der $\mathbf{F}$ er vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{2y^3 x}{3\sqrt{1 - x^2}}, y^2\sqrt{1 - x^2} \right).$$

Greens teorem

S22, oppgave 7

La $\mathcal{C}$ være ellipsen gitt ved ligningen $x^2 + (y/3)^2 = 1$, orientert mot klokken. Bruk Greens teorem til å finne $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, der $\mathbf{F}$ er vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{2y^3 x}{3\sqrt{1 - x^2}}, y^2 \sqrt{1 - x^2} \right).$$

Greens teorem:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

der $\mathbf{F} = (P, Q)$ og kurven $\mathcal{C}$ er randen til området $\mathcal{R}$ i $\mathbb{R}^2$, orientert mot klokken

Ekstremalpunkt

V22, oppgave 1

Finn den største og minste verdien til funksjonen

$$f(x, y) = xy$$

på ellipsen gitt ved ligningen

$$\tfrac{1}{2}x^2 + y^2 = 1.$$

Ekstremalpunkt

V22, oppgave 1

Finn den største og minste verdien til funksjonen

$$f(x, y) = xy$$

på ellipsen gitt ved ligningen

$$\tfrac{1}{2}x^2 + y^2 = 1.$$

Lagranges multiplikatormetode: ekstremalpunkt for $f(x, y)$ på kurven $g(x, y) = c$ der $\nabla g \neq \mathbf{0}$ må ha

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

(hvis det ikke er et endepunkt)