Kunnskap for en bedre verden

TMA4105 Matematikk 2 – våren 2023

Oversiktsforelesning 13

Nøkkelbegreper uke 16

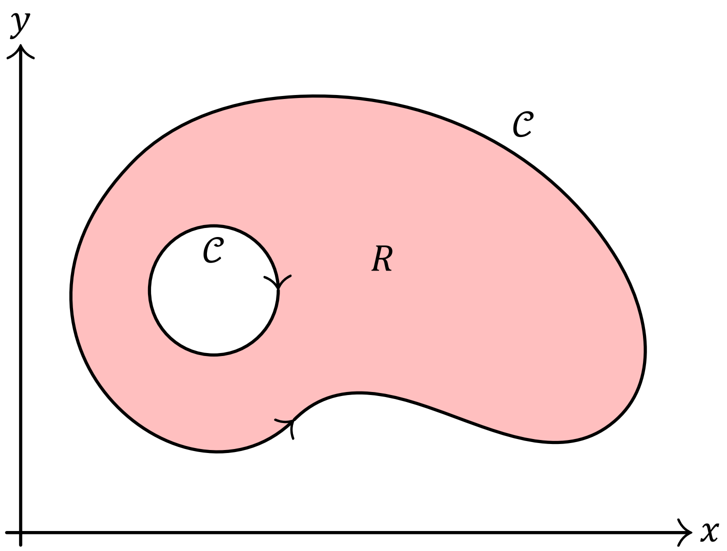
- Stokes' teorem

Greens teorem

La R være et regulært, lukket område i xy-planet hvis rand, $\mathcal{C} = \partial R$, består av en eller flere stykkevis glatte, enkle lukkede kurver som er positivt orientert med hensyn på R.

Hvis $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ er et glatt vektorfelt definert på R, så er

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$



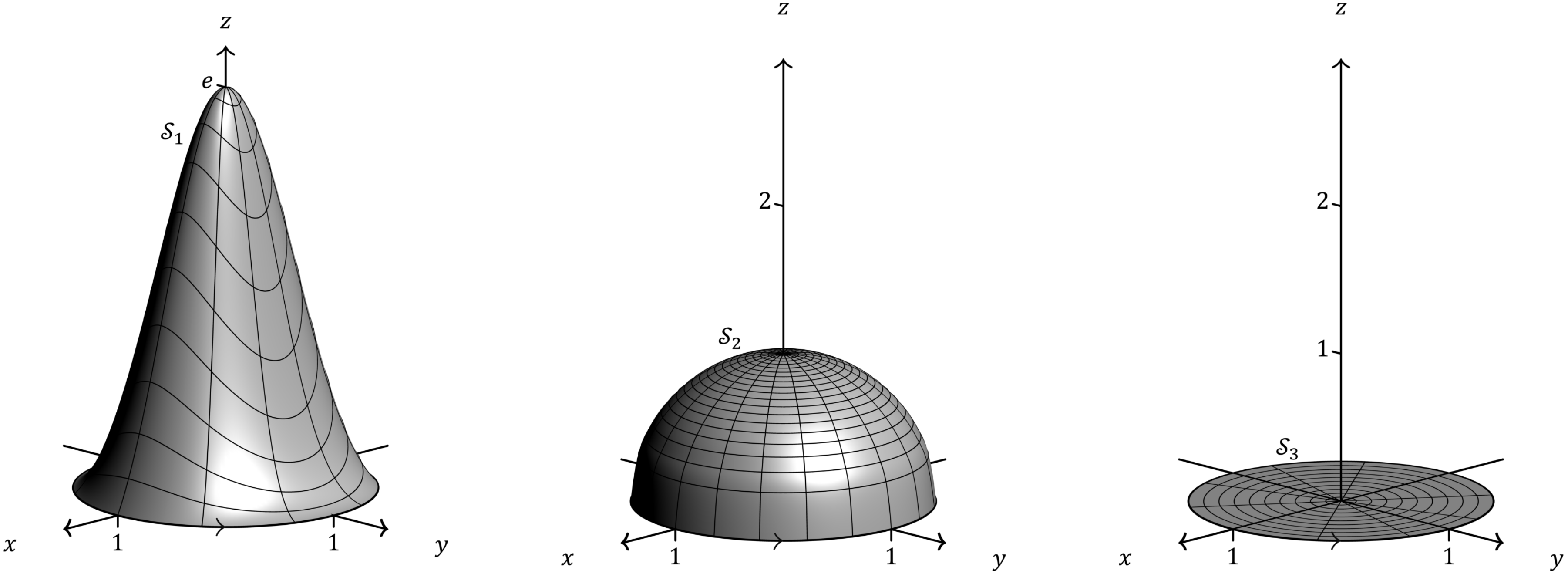
Stokes' teorem

La $\mathcal{S}$ være en stykkevis glatt, orientert flate i $\mathbb{R}^3$ med enhetsnormal $\hat{\mathbf{N}}$, der randen til $\mathcal{S}$, $\mathcal{C} = \partial\mathcal{S}$, består av en eller flere stykkevis glatte, lukkede kurver hvis orientering er bestemt av orienteringen av $\mathcal{S}$.

Dersom $\mathbf{F}$ er et glatt vektorfelt definert på en åpen mengde som inneholder $\mathcal{S}$, så er

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

Bruk av Stokes' teorem



$$\oint_{\partial \mathcal{S}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial \mathcal{S}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial \mathcal{S}_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{\mathcal{S}_2} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{\mathcal{S}_3} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

Eksempel 1

La $\mathcal{C}$ være skjæringskurven mellom sylinderen

$$x^2 + y^2 = 1$$

og sadelflaten

$$z = 2 + y^2 - x^2$$

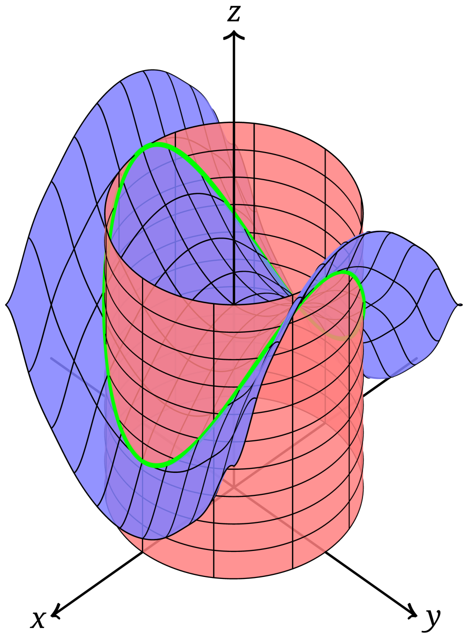
orientert mot klokken sett ovenfra.

Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \big(y, -x, z + 1\big).$$



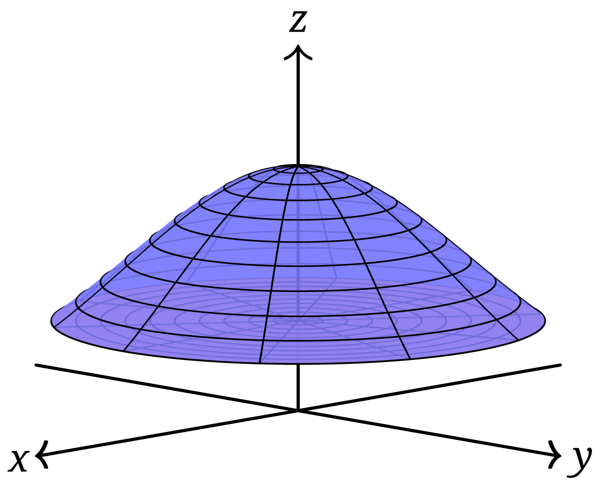
Eksempel 2

La $\mathcal{S}_1$ være flaten gitt ved

$$z = e^{-(x^2+y^2)}, \qquad z \geq \frac{1}{e},$$

og la $\mathcal{S}_2$ være flaten gitt ved

$$z = \frac{1}{e}, \qquad x^2 + y^2 \leq 1.$$



Regn ut

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$$

der

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(e^{y+z} - 2y, xe^{y+z} + y, e^{x+y}\right).$$