Kunnskap for en bedre verden

TMA4105 Matematikk 2 – våren 2023

Oversiktsforelesning 12

Nøkkelbegreper uke 13

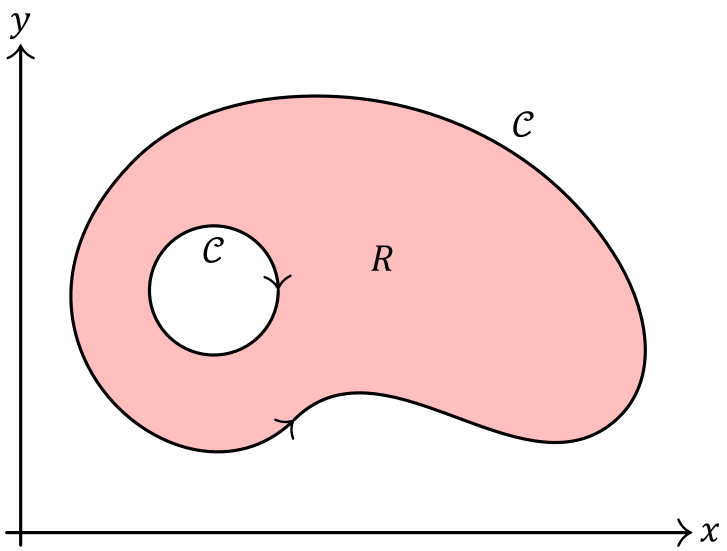
- Divergensteoremet

Greens teorem

La R være et regulært, lukket område i xy-planet hvis rand, $\mathcal{C} = \partial R$, består av en eller flere stykkevis glatte, enkle lukkede kurver som er positivt orientert med hensyn på R.

Hvis $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ er et glatt vektorfelt definert på R, så er

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

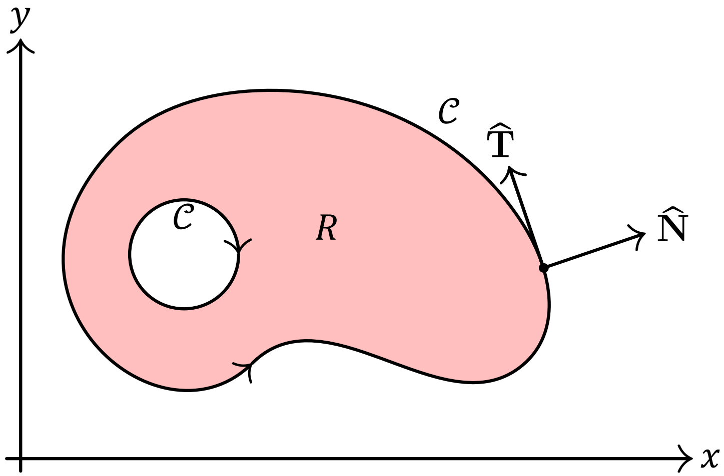


Divergensteoremet i planet

La R være et regulært, lukket område i xy-planet hvis rand, $\mathcal{C} = \partial R$, består av en eller flere stykkevis glatte, enkle lukkede kurver som er positivt orientert med hensyn på R.

Hvis $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ er et glatt vektorfelt definert på R, så er

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, ds = \iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA.$$



Divergensteoremet

La $D \subseteq \mathbb{R}^3$ være et regulært område med rand $\mathcal{S} = \partial D$. Anta at $\mathcal{S}$ er en orientert og lukket flate, der enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ peker ut av D.

Dersom $\mathbf{F}$ er et glatt vektorfelt som er definert på D, så er

$$\iiint_T \operatorname{div}\, \mathbf{F}\, dV = \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

Eksempel: Sommeren 2004, oppgave 3

La T være legemet avgrenset av de to flatene

$$z = 2x \qquad \text{og} \qquad z = x^2 + y^2,$$

og la $\mathcal{C}$ betegne skjæringskurven mellom disse to flatene.

La videre $\mathcal{S}$ betegne overflaten til T, og la $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \big(4x + y, -x - 4y - z, 2y + 4z\big).$$

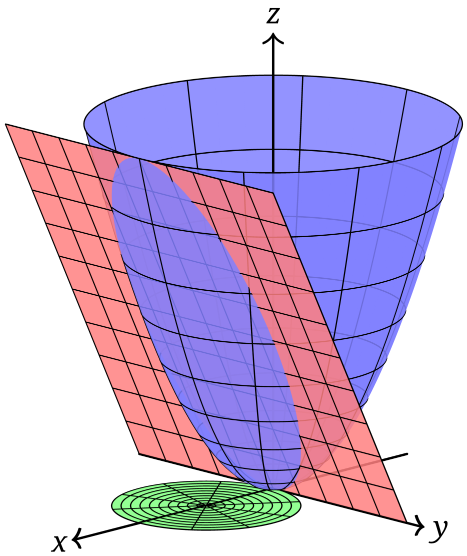
a) Vis at projeksjonen av $\mathcal{C}$ i xy-planet er en sirkel.

Beregn arealet A av den plane delen av $\mathcal{S}$.

b) Beregn volumet V av T.
c) Beregn

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS \qquad \text{og} \qquad \iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

der $\hat{\mathbf{N}}$ er ytre enhetsnormal til $\mathcal{S}$ og $\mathcal{S}_1$ er den krumme delen av $\mathcal{S}$.



(Vink: $\int_0^{\pi/2} \cos^4(\theta)\, d\theta = \frac{3\pi}{16}$.)