TMA4105 MATEMATIKK 2

Oversiktsforelesning 1
Kjeglesnitt, parametriserte kurver og polarkoordinater

Rune Haugseng
Institutt for matematiske fag, NTNU

9. januar 2023

NTNU | Kunnskap for en bedre verden

Velkommen til Matematikk 2

- Matematikk 2 er fortsettelsen av Matematikk 1
- Hovedemnet er kalkulus (derivasjon og integrasjon) i flere variabler
- Undervisningstilbudet ligner det i Matematikk 1:
  - oversiktsforelesning
  - plenumsregning
  - interaktive forelesninger
  - mattelab (fra 16. januar)
- All informasjon finnes på hjemmesiden (**ikke** i Blackboard): `https://wiki.math.ntnu.no/tma4105/2023v/`

Arbeidskrav

- Minst 6 av 12 STACK-tester godkjent
- Minst 2 av 4 skriftlige innlevering godkjent
- Merk: Alle innleveringsfrister er kl. **16** på de oppgitte dagene

Eksamen

- Dato foreløpig ikke bestemt
- Fysisk skriftlig eksamen med bokstavkarakter (teller 100%)

Spørsmål?

- Ofte stilte spørsmål:
  `https://wiki.math.ntnu.no/tma4105/2023v/faq`
- Digital mattelab/forum:
  `https://mattelab2023v.math.ntnu.no/c/tma4105-matematikk-2/41`
- Kontaktinformasjon (**ikke** for faglige spørsmål):
  `https://wiki.math.ntnu.no/tma4105/2023v/kontakt`
- Ikke send epost direkte til forelesere/faglærere!

Mengder

- En **mengde** er en samling av **elementer**
- $\mathbb{R}$ er mengden av reelle tall

Mengder

- En **mengde** er en samling av **elementer**
- $\mathbb{R}$ er mengden av reelle tall
- "$x \in S$" betyr: x er et element av mengden S
- "$T \subseteq S$" betyr: T er en **undermengde** av mengden S, dvs. alle elementene i T er også elementer i S

Mengder

- En **mengde** er en samling av **elementer**
- $\mathbb{R}$ er mengden av reelle tall
- "$x \in S$" betyr: x er et element av mengden S
- "$T \subseteq S$" betyr: T er en **undermengde** av mengden S, dvs. alle elementene i T er også elementer i S
- Hvis P er et utsagn om elementene i S (som kan være sant eller usant) er
$$\{x \in S : P(x)\}$$
undermengden av S som består av elementene x der $P(x)$ er sant.
- Eksempel: $\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 2\} \subseteq \mathbb{R}$

Produkter av mengder

- **Produktet** $S \times T$ av to mengder S, T består av alle ordnede par (s, t) der $s \in S, t \in T$.
- Tilsvarende består $S_1 \times S_2 \cdots \times S_n$ av lister $(s_1, \ldots, s_n)$ der $s_i \in S_i$.

Produkter av mengder

- **Produktet** $S \times T$ av to mengder S, T består av alle ordnede par (s, t) der $s \in S, t \in T$.
- Tilsvarende består $S_1 \times S_2 \cdots \times S_n$ av lister $(s_1, \ldots, s_n)$ der $s_i \in S_i$.
- $\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ er produktet av n kopier av $\mathbb{R}$, og består av lister $(x_1, \ldots, x_n)$ der $x_i \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}^n$ er et n-dimensjonalt (vektor)rom
- $\mathbb{R}^2$ er et (2-dimensjonalt) plan og $\mathbb{R}^3$ et 3-dimensjonalt rom (beskrevet med kartesiske koordinater)

Produkter av mengder

- **Produktet** $S \times T$ av to mengder S, T består av alle ordnede par (s, t) der $s \in S, t \in T$.
- Tilsvarende består $S_1 \times S_2 \cdots \times S_n$ av lister $(s_1, \ldots, s_n)$ der $s_i \in S_i$.
- $\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ er produktet av n kopier av $\mathbb{R}$, og består av lister $(x_1, \ldots, x_n)$ der $x_i \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}^n$ er et n-dimensjonalt (vektor)rom
- $\mathbb{R}^2$ er et (2-dimensjonalt) plan og $\mathbb{R}^3$ et 3-dimensjonalt rom (beskrevet med kartesiske koordinater)
- Vi kaller ofte en undermengde $D \subseteq \mathbb{R}^n$ et **område** i $\mathbb{R}^n$.

Funksjoner

- En **funksjon** f fra en mengde S til en mengde T angir et unikt element $f(s) \in T$ for hvert element $s \in S$.

Funksjoner

- En **funksjon** f fra en mengde S til en mengde T angir et unikt element $f(s) \in T$ for hvert element $s \in S$.
- Vi angir en slik funksjon med notasjonen $f : S \to T$.

Funksjoner

- En **funksjon** f fra en mengde S til en mengde T angir et unikt element $f(s) \in T$ for hvert element $s \in S$.
- Vi angir en slik funksjon med notasjonen $f\colon S \to T$.
- For funksjoner $f\colon S \to T$, $g\colon T \to U$ er **komposisjonen** $g \circ f = gf\colon S \to U$ funksjonen gitt ved $(g \circ f)(s) = g(f(s))$ for $s \in S$.

Funksjoner

- En **funksjon** f fra en mengde S til en mengde T angir et unikt element $f(s) \in T$ for hvert element $s \in S$.
- Vi angir en slik funksjon med notasjonen $f\colon S \to T$.
- For funksjoner $f\colon S \to T$, $g\colon T \to U$ er **komposisjonen** $g \circ f = gf\colon S \to U$ funksjonen gitt ved $(g \circ f)(s) = g(f(s))$ for $s \in S$.
- **Merk:** En funksjon $S \to T_1 \times \cdots \times T_n$ består av en liste $(f_1, \ldots, f_n)$ av funksjoner $f_i\colon S \to T_i$.

Nøkkelbegreper

- Parametriserte kurver i planet
- Kjeglesnitt
- Stigningstall for parametriserte kurver
- Buelengde av parametriserte kurver
- Polarkoordinater
- Areal av områder begrenset av kurver gitt ved polarkoordinater
- Buelengde av kurver gitt ved polarkoordinater

Tangenter for parametriserte kurver

Teorem 8.1

- La C være en parametrisert kurve gitt ved $x = f(t), y = g(t)$ for $t \in I$
- Anta at f og g er deriverbare med f', g' kontinuerlige på I

Tangenter for parametriserte kurver

Teorem 8.1

- La C være en parametrisert kurve gitt ved $x = f(t), y = g(t)$ for $t \in I$
- Anta at f og g er deriverbare med f', g' kontinuerlige på I
- Hvis $f'(t) \neq 0$ for alle $t \in I$ så er C glatt og har en tangent i punktet $(f(t), g(t))$ med stigningstall

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

Tangenter for parametriserte kurver

Teorem 8.1

- La C være en parametrisert kurve gitt ved $x = f(t), y = g(t)$ for $t \in I$
- Anta at f og g er deriverbare med f', g' kontinuerlige på I
- Hvis $f'(t) \neq 0$ for alle $t \in I$ så er C glatt og har en tangent i punktet $(f(t), g(t))$ med stigningstall

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

- Hvis $g'(t) \neq 0$ for alle $t \in I$ så er C glatt og har en normal i punktet $(f(t), g(t))$ med stigningstall

$$-\frac{dx}{dy} = -\frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

Eksempel (Buelengde)

Finn lengden av kurven

$$
\begin{aligned}
x &= t - \sin t = f(t) \\
y &= 1 - \cos t = g(t)
\end{aligned}
$$

der $0 \leq t \leq 2\pi$.

Eksempel (Buelengde i polarkoordinater)

Finn lengden av kurven

$$r = e^{a\theta}$$

der $0 \leq \theta \leq 2\pi$ og $a > 0$.

Figurer

- https://www.math3d.org/28KoIQNH
- https://www.math3d.org/ott7JimB