

Anbefalte oppgaver uke 8

Våren 2023

Løsningsforslag

- 1 Det letteste er kanskje å bytte til polarkoordinater. Siden vi skal integrere over en kvartdisk i første kvadrant finner vi dermed

$$\iint_Q y \, dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^a r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\theta = \int_0^a r^2 \, dr = \frac{a^3}{3}.$$

- 2 Gjennomsnittverdien til $f(x, y, z)$ over R er gitt ved

$$\bar{f}|_R = \frac{1}{V(R)} \iiint_R f \, dV$$

der $V(R)$ betegner volumet til R . Hvis R er enhetskuben er $V(R) = 1$ og vi ender opp i det tilfellet også $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ med

$$\begin{aligned} \bar{f}|_R &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y^2 + z^2 \right) \, dy \, dz \\ &= \dots = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1. \end{aligned}$$

- 3 a) Volumet av sylinder med høyde h og radius r :

$$V = \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} h \, dA = h \text{Areal}(\{x^2 + y^2 \leq r^2\}) = \pi r^2 h.$$

- b) Kule med radius R : se på $z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Volumet til kulen vi vil ha er da to ganger volumet av z over disken $x^2 + y^2 \leq R^2$. Det vil si:

$$V = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, dA.$$

Bruk av polarkoordinater gir dermed:

$$V = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^R r \sqrt{R^2 - r^2} \, dr \, d\theta = 4\pi \int_0^R r \sqrt{R^2 - r^2} \, dr = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

- c) Volum av kjegle med radius r og høyde h : la $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ der $x^2 + y^2 \leq r^2$. Da er grafen til z en kjegle med radius r og høyde r . Betrakt derfor $g(x, y) = h/r$ der $x^2 + y^2 \leq r^2$ som før. Da er grafen til g en kjegle med radius r og høyde h . Volumet *under kjeglen*, som er volumet under grafen til g , er da gitt ved

$$V_0 = \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} g(x, y) \, dA = \frac{h}{r} \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} \sqrt{x^2 + y^2} \, dA.$$

Bruk av polarkoordinater git dermed (nedenfor er r' ikke den deriverte til r (hva skulle dette i det hele tatt bety?), men kun en variabel vi bruker i integrasjonen siden r allerede er opptatt med rollen som radius)

$$V_0 = \frac{h}{r} \int_0^{2\pi} \int_0^r r'^2 \, dr' \, d\theta = \frac{2\pi h}{r} \int_0^r r'^2 \, dr' = \frac{2\pi h}{3} r^2.$$

Volumet av selve kjeglen blir nå volumet av en sylinder med radius r og høyde h , som er $\pi r^2 h$, minus V_0 . Altså er volumet vi er på jakt etter gitt ved

$$V = \pi r^2 h - \frac{2\pi h}{3} r^2 = \frac{\pi h r^2}{3}.$$

Vi kunne også fått dette direkte ved å erstatte g ovenfor med $h - g$.

- 4 Anta at polarkurven vår er $r = f(\theta)$ med $\theta \in [a, b]$. Da er integrasjonsområdet vårt i polarkoordinater gitt ved $\mathcal{D} = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq f(\theta), a \leq \theta \leq b\}$. Altså er arealet av dette området, som riktignok også er arealet innesluttet at polarkurven vår:

$$\iint_{\mathcal{D}} 1 \, dA = \int_a^b \int_0^{f(\theta)} r \, dr \, d\theta = \int_a^b \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{f(\theta)} \, d\theta = \frac{1}{2} \int_a^b f(\theta)^2 \, d\theta$$

som er formelen vi kjenner til fra før (uke 2). For arealet innesluttet av ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ bruker vi variabelskiftet $u = x/a$ og $v = y/b$. Det gir at ellipsen er $u^2 + v^2 = 1$ som enhets sirkelen i uv -planet. Arealet innesluttet av ellipsen (i xy -planet) er derfor arealet av enhetsdisken i uv -planet. La ellipsen være E og la enhetsdisken være \mathbb{D} . Vi har altså fra variabelskifteformelen

$$\iint_E dx \, dy = \iint_{\mathbb{D}} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du \, dv.$$

Siden $x = au$, $y = bv$ er (absoluttverdien av) jacobideterminanten $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = |ab|$. Vi kan godt for enkelhetsskyld anta at $a, b > 0$. Altså finner vi at

$$\text{Areal}(E) = ab \iint_{\mathbb{D}} du \, dv = ab \text{Areal}(\mathbb{D}) = \pi ab.$$

- 5 https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/eksamen/lf_tma4105_10k.pdf
- 6 https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/eksamen/lf_tma4105_2016v.pdf
- 7 https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/eksamen/tma4105_15v_lf.pdf