Anbefalte oppgaver uke 4

Våren 2023

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ Per definisjon, har vi at

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - f'(\mathbf{a})(\mathbf{h})}{|\mathbf{h}|} = 0.$$

Siden $f'(\mathbf{a})$ er linær, følger det at $f'(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = 0$ når $|\mathbf{h}| \to 0$. Men da må resten av telleren også gå mot 0, siden nevneren åpenbart går mot 0. Det betyr at

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \big(f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a})\big) = 0$$

som betyr at f er kontinuerlig i $\mathbf{a}$.

$\boxed{2}$ Kjerneregelen gir

$$z_u = g_u = g_x x_u + g_y y_u = g_x h_u + g_y f_x h_u.$$

$\boxed{3}$ Vi skriver $(3.1, 0.9) = (3, 1) + (0.1, -0.1) = (a, b) + (h, k)$ der $(a, b) = (3, 1)$. Bruk av linearisering gir dermed

$$f(a+h, b+k) \approx f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k.$$

Med $f(x, y) = x^2 y^3$ finner vi:

$$\begin{aligned} f(a,b) &= 3^2 = 9 \\ f_x &= 2xy^3 \\ f_x(a,b) &= 6 \\ f_y &= 3x^2y^2 \\ f_y(a,b) &= 27 \end{aligned}$$

og dermed:

$$f(3.1, 0.9) \approx 9 + 6(0.1) + 27(-0.1) = 9 + \frac{6}{10} - \frac{27}{10} = \frac{69}{10} = 6.9.$$

Til sammenligning, så har vi nøyaktig at $f(3.1, 0.9) = (3.1)^2(0.9)^3 = 7.00569$.

$\boxed{4}$ Jacobimatrisen blir

$$J_{\mathbf{f}}(r,\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

$\boxed{5}$ La $\mathbf{v}$ være retningen. Vi skriver $\mathbf{v} = (a, b)$ med $\sqrt{a^2+b^2} = 1$. Den retningsderiverte i punktet $\mathbf{p}$ til f i retningen $\mathbf{v}$ er $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}$. Siden $\nabla f(x, y) = (y, x)$ finner vi for $\mathbf{p} = (2, 0)$ at

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{p}) = 2b$$

og skal dette være -1 finner vi at $b = -1/2$. Dermed må vi ha $a^2 = 1 - b^2 = 1 - 1/4 = 3/4$ som gir $a = \pm\sqrt{3}/2$. Hvis vi istedenfor -1 skal ha -3 finner vi $2b = -3$ eller $b = -3/2$. Det gir så $a^2 = 1 - 9/4 = -5/4$ som er umulig. Altså kan ikke den retningsderiverte være lik -3. Hvis vi skal ha at den retningsderiverte er lik -2 finner vi at $b = -1$. Det gir at $a = 0$. Altså har vi:

- $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{p}) = -1$ for $\mathbf{v} = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$,
- $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{p}) = -2$ for $\mathbf{v} = (0, -1)$.

$\boxed{6}$ Fikser et punkt (a, b) i disken. Det holder å vise at $f(a, b) = f(0, 0)$. La $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ være en glatt parametrisert kurve i disken slik at $\mathbf{c}(0) = (x(0), y(0)) = (0, 0)$, $\mathbf{c}(1) = (x(1), y(1)) = (a, b)$. For eksempel kan vi la $\mathbf{c}(t) = t(a, b)$. La $g(t) = f(\mathbf{c}(t))$. Ved kjerneregelen følger det at $g'(t) = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)$. Integrasjon og bruk av analysens fundamentalteorem gir dermed

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)\, dt = \int_0^1 \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\, dt = 0$$

siden vi per antagelse har at $\nabla f(\mathbf{c}(t)) = 0$ for alle $t \in [0, 1]$. Men det betyr at $g(1) = g(0)$. Siden $g(1) = f(\mathbf{c}(1)) = f(a, b)$ og $g(0) = f(\mathbf{c}(0)) = f(0, 0)$ følger det at $f(a, b) = f(0, 0)$ som ønsket.

Merk: Det er ikke er noe spesielt med disken. Det samme argumentet hadde gitt samme konklusjon (at f er konstant) så lenge området er slik at alle to punkter kan forbindes ved hjelp av en (stykkevis) glatt kurve.

$\boxed{7}$ Vi deriverer den oppgitte ligningen med hensyn på y. Det gir

$$\frac{\partial x}{\partial y} y^3 + 3xy^2 + 4x^3 \frac{\partial x}{\partial y} y + x^4 = 0.$$

Dermed er

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{x^4 + 3xy^2}{y^3 + 4x^3 y}$$

der dette holder så lenge nevneren ikke er 0.

$\boxed{8}$ Første steg er å bestemme jacobimatrisen. Vi får

$$\begin{aligned}
J_{\mathbf{f}}(R, \varphi, \theta) &= \begin{bmatrix} x_R & x_\varphi & x_\theta \\ y_R & y_\varphi & y_\theta \\ z_R & z_\varphi & z_\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & R\cos(\varphi)\cos(\theta) & -R\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & R\cos(\varphi)\sin(\theta) & R\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\varphi) & -R\sin(\varphi) & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Det siste steget er å regne ut determinanten til jacobimatrisen. Vi får

$$\begin{aligned}
&|J_{\mathbf{f}}(R,\varphi,\theta)| \\
&\quad = \sin(\varphi)\cos(\theta)(R^2\sin^2(\varphi)\cos(\theta)) - R\cos(\varphi)\cos(\theta)(-R\sin(\varphi)\cos(\varphi)\cos(\theta)) \\
&\qquad - R\sin(\varphi)\sin(\theta)(-R\sin^2(\varphi)\sin(\theta) - R\cos^2(\varphi)\sin(\theta)) \\
&\quad = R^2\sin(\varphi)\cos^2(\theta)\left[\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)\right] + R^2\sin(\varphi)\sin^2(\theta)\left[\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)\right] \\
&\quad = R^2\sin(\varphi)\left[\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)\right] \\
&\quad = R^2\sin(\varphi).
\end{aligned}$$