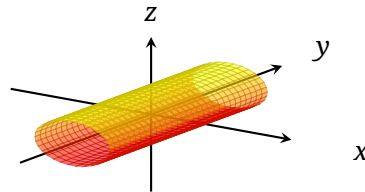


Anbefalte oppgaver uke 4

Våren 2023

Løsningsforslag

- 1 Siden y ikke dukker opp, er det ingen begrensninger på y . I xz -planet vet vi at vi har en ellipse $(\frac{x}{2})^2 + z^2 = 1$. Den totale flaten er derfor en uendelig lang elliptisk sylinder som strekker seg i y -retning.



- 2 Vi deriverer og finner

$$w_x(x, y, z) = \frac{e^{xyz} yz}{1 + e^{xyz}}$$

og på grunn av symmetrien, har vi w_y, w_z det samme, men med x erstattet med henholdsvis y og z :

$$w_y(x, y, z) = \frac{e^{xyz} zx}{1 + e^{xyz}}$$

$$w_z(x, y, z) = \frac{e^{xyz} yx}{1 + e^{xyz}}.$$

Evaluerer i punktet $p = (2, 0, -1)$ gir dermed:

$$w_x(p) = 0$$

$$w_y(p) = -1$$

$$w_z(p) = 0.$$

- 3 Derivasjon gir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}.$$

Evaluerer i punktet $p = (-3, 4)$ gir dermed:

$$f_x(p) = \frac{3}{\sqrt{9 + 16}^3} = \frac{3}{5^3}$$

$$f_y(p) = -\frac{4}{5^3}.$$

4 Derivasjon gir:

$$z_x(x, y) = 2x(1 + y^2)$$

$$z_{xx}(x, y) = 2(1 + y^2)$$

$$z_y(x, y) = 2yx^2$$

$$z_{yy}(x, y) = 2x^2$$

$$z_{xy}(x, y) = z_{yx} = 4xy.$$

5 Vi deriverer og finner

$$f_x(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= \frac{2(x^2 + y^2) - 2x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= 2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

og på grunn av symmetri, finner vi $f_{yy}(x, y) = 2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$; det vil si det samme, men med x byttet ut med y . Disse holder selvfølgelig bare vekk fra origo. Addisjon gir dermed

$$f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y) = 0, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

som viser utsagnet (se boken for definisjon av harmoniske funksjoner).