

Anbefalte oppgaver uke 13

Våren 2023

Løsningsforslag

- 1] Dersom vektorfeltet er konstant er naturligvis divergensen 0, så utsagnet er en direkte konsekvens av divergensteoremet.
- 2] Vi bruker divergensteoremet. Vi har $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 1 - 2 + 4 = 3$ slik at fluksen er 3 ganger volumet til kulen: $4\pi a^3$.
- 3] Siden divergensen til integrandvektorfeltet vårt er 3, følger det fra divergensteoremet at fluksen (som er integralet på høyresiden uten konstanten $1/3$ foran) er lik 3 ganger volumet. Altså er volumet $1/3$ av fluksen. Det er nøyaktig det vi skulle vise.

Vi kunne erstattet integrandvektorfeltet med et hvilken som helst annet vektorfelt med divergens lik en eller annen konstant $c \neq 0$. Hvis \mathbf{F} er et slikt vektorfelt med $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = c \neq 0$, følger det dermed at

$$\frac{1}{c} \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = V.$$

- 4] La $\mathbf{F} = \nabla\phi$. Vi har fra formelen til den retningsderiverte at $\frac{\partial\phi}{\partial n} = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = \nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{N}}$. Siden $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \operatorname{div}(\nabla\phi) = \Delta\phi$ følger derfor formelen direkte fra divergensteoremet.
- 5] La $\mathbf{F} = \phi\nabla\psi$. Det følger fra formelen til den retningsderiverte at $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = \phi\nabla\psi \cdot \hat{\mathbf{N}} = \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}$. Videre følger det fra produktregelen at $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \phi\Delta\psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi$. Altså gir divergensteoremet at

$$\iiint_D (\phi\Delta\psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi) \, dV = \iint_S \phi \frac{\partial\psi}{\partial n} \, dS.$$

Vi erstatter nå ϕ med ψ og får

$$\iiint_D (\psi\Delta\phi + \nabla\psi \cdot \nabla\phi) \, dV = \iint_S \psi \frac{\partial\phi}{\partial n} \, dS.$$

Subtraksjon gir dermed den ønskede formelen.

- 6] Med $\mathbf{F} = \phi\mathbf{c}$ der \mathbf{c} er en konstant vektor, følger det at $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \nabla\phi \cdot \mathbf{c}$. Dermed gir divergensteoremet at

$$\iiint_D \nabla\phi \cdot \mathbf{c} \, dV = \iint_S \phi\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS.$$

La oss skrive $\hat{\mathbf{N}} = (N_1, N_2, N_3)$. Velger vi nå $\mathbf{c} = (1, 0, 0)$, finner vi

$$\iiint_D \phi_x \, dV = \iint_S \phi N_1 \, dS.$$

Velger vi $\mathbf{c} = (0, 1, 0)$ får vi

$$\iiint_D \phi_y \, dV = \iint_S \phi N_2 \, dS.$$

og velger vi tilslutt $\mathbf{c} = (0, 0, 1)$ får vi

$$\iiint_D \phi_z \, dV = \iint_S \phi N_3 \, dS.$$

Disse tre identitetene gir det ønskede resultatet: gang den første med vektoren $(1, 0, 0)$, den andre med vektoren $(0, 1, 0)$, og den siste med vektoren $(0, 0, 1)$ og legg sammen resultatene.

TMA4105 Matematikk 2

- 7 https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/eksamen/lf_sif5005_03k.pdf
- 8 https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/eksamen/sif5005_1998-05-14_lf.pdf
- 9 https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/eksamen/lf_sif5005_00k.pdf