

## Anbefalte oppgaver uke 11

Våren 2023

## Løsningsforslag

1 I kulekoordinater har vi:

$$x = a \sin(\varphi) \cos(\theta)$$

$$y = a \sin(\varphi) \sin(\theta)$$

$$z = a \cos(\varphi)$$

slik at parametrisering for sfæren blir

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

med partielle deriverte

$$\mathbf{r}_\varphi = (a \cos(\varphi) \cos(\theta), a \cos(\varphi) \sin(\theta), -a \sin(\varphi))$$

$$\mathbf{r}_\theta = (-a \sin(\varphi) \sin(\theta), a \sin(\varphi) \cos(\theta), 0)$$

som gir kryssproduktet:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta| &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos(\varphi) \cos(\theta) & a \cos(\varphi) \sin(\theta) & -a \sin(\varphi) \\ -a \sin(\varphi) \sin(\theta) & a \sin(\varphi) \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix} \\ &= (a^2 \sin^2(\varphi) \cos(\theta), a^2 \sin^2(\varphi) \sin(\theta), a^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)) \end{aligned}$$

som har lengde

$$|\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta| = a^2 \sqrt{\sin^4(\varphi) + \cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi)} = a^2 \sin(\varphi)$$

siden  $\varphi \in [0, \pi]$  (ellers måtte vi generelt hatt absoluttverdi av  $\sin(\varphi)$ ). Dermed følger det at flatelementet er  $dS = a^2 \sin(\varphi) d\varphi d\theta$ .

2 Vi bruker  $x$  og  $y$  som parametre og skriver  $z = x^2/2$ . Projeksjonen av flaten vår i  $xy$ -planet er kvartdisken  $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ . Med  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x^2/2)$  som parametrisering får vi

$$\mathbf{r}_x = (1, 0, x) \quad \text{og} \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, 0)$$

slik at

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-x, 0, 1)$$

sånn at lengden av dette er  $\sqrt{x^2 + 1}$ . Dermed er

$$\begin{aligned} \iint_S x \sqrt{x^2 + 1} dS &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x \sqrt{x^2 + 1} dx dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{x^2 + 1} \Big|_0^{\sqrt{1-y^2}} dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 (\sqrt{2-y^2}^3 - 1) dy \\ &= \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

- 3 Kjeglen skjærer planet i  $1 + y = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$  eller  $(1 + y)^2 = 2(x^2 + y^2)$ . Det vil si,

$$1 = 2(x^2 + y^2) - y^2 - 2y = 2x^2 + y^2 - 2y$$

som ved fullføring av kvadrat i  $y$  gir

$$2 = 2x^2 + (y - 1)^2$$

Dermed er

$$1 = x^2 + \left(\frac{y-1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Dette er en ellipse i  $x$  og  $y$ . Vi vil ikke bare ha ellipsen, men innsiden også. Vi kan parametrisere ved bruk av parametre  $(r, \theta)$  tilsvarende polarkoordinater, der

$$x(r, \theta) = r \cos(\theta) \quad \text{og} \quad y(r, \theta) = 1 + \sqrt{2}r \sin(\theta)$$

med  $\theta \in [0, 2\pi]$  og  $r \in [0, 1]$ . Fra  $z = 1 + y$  får vi dermed  $z(r, \theta) = 2 + \sqrt{2}r \sin(\theta)$ . Dermed får vi at en parametrisering for  $\mathcal{S}$  er gitt ved

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos(\theta), 1 + \sqrt{2}r \sin(\theta), 2 + \sqrt{2}r \sin(\theta)).$$

Det gir at

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_r &= (\cos(\theta), \sqrt{2} \sin(\theta), \sqrt{2} \sin(\theta)) \\ \mathbf{r}_\theta &= (-r \sin(\theta), \sqrt{2}r \cos(\theta), \sqrt{2}r \cos(\theta)) \end{aligned}$$

slik at

$$\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos(\theta) & \sqrt{2} \sin(\theta) & \sqrt{2} \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & \sqrt{2}r \cos(\theta) & \sqrt{2}r \cos(\theta) \end{pmatrix} = (0, -\sqrt{2}r, \sqrt{2}r)$$

som gir at

$$|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = 2r.$$

Dermed er

$$\iint_{\mathcal{S}} y \, dS = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + \sqrt{2}r \sin(\theta))r \, dr \, d\theta = 2\pi.$$

- 4 Randen til projeksjonen av skjæringsflaten finner vi for  $x^2 = 1 - 3x^2 - y^2$  (når de to  $z$  uttrykkene er like hverandre). Dette gir  $4x^2 + y^2 = 1$  som er en ellipse. I første oktant får vi kun kvarte ellipsen med  $x, y \geq 0$ . Kall denne  $E$ . Vi bruker  $x$  og  $y$  som parametre og finner en parametrisering for  $\mathcal{S}$  gitt ved

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x^2), \quad (x, y) \in E.$$

Dermed er

$$\mathbf{r}_x = (1, 0, 2x) \quad \text{og} \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, 0)$$

som gir at

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-2x, 0, 1)$$

slik at lengden av denne er  $\sqrt{4x^2 + 1}$ . Vi finner derfor at

$$\begin{aligned} \iint_S xz \, dS &= \iint_E x^3 \sqrt{4x^2 + 1} \, dy \, dx \\ &= \int_0^{1/2} x^3 \sqrt{4x^2 + 1} \sqrt{1 - 4x^2} \, dx \\ &= \int_0^{1/2} x^3 \sqrt{1 - 16x^4} \, dx \\ &= \frac{1}{96}. \end{aligned}$$

- 5] Vi sparer oss litt tid hvis vi merker oss at vi kun får bidrag fra fluks gjennom planet  $y = 0$  og  $\Pi$  gitt ved  $x + 2y + 3z = 6$ : det er ikke noe bidrag gjennom  $z = 0$  siden  $\mathbf{F}$  ikke har noe  $z$ -komponent, og det er ikke noe bidrag gjennom  $x = 0$  fordi  $\mathbf{F} \cdot (-1, 0, 0) = -x = 0$  når  $x = 0$ . Når  $y = 0$  finner vi fra  $\Pi$  at  $x + 3z = 6$ . Videre finner vi at  $\mathbf{F} \cdot (0, -1, 0) = -z$ . Fluksbidraget gjennom  $y = 0$  er så gitt ved

$$\Phi_{y=0} = \iint_{x+3z \leq 6, x, z \geq 0} (-z) \, dA = - \int_0^2 z(6 - 3z) \, dz = -4.$$

Det gjenstår å finne fluksen gjennom  $\Pi$ . Det kan vi gjøre på følgende måte. Vi parametriserer  $\Pi$  ved bruk av  $x, y$  som gir oss

$$\mathbf{r}(x, y) = \left( x, y, \frac{6 - x - 2y}{3} \right)$$

der  $(x, y) \in D$  og  $D$  er gitt som projeksjonen av  $\Pi$  ned i  $xy$ -planet. Dermed er

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{pmatrix} = \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right)$$

og siden denne har positiv  $z$ -komponent har vi funnet riktig normalvektor. Dermed blir fluksbidraget

$$\begin{aligned} \Phi_{\Pi} &= \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) \, dA \\ &= \iint_{x+2y \leq 6, x, y \geq 0} \left( \frac{x}{3} + \frac{2}{3} z(x, y) \right) \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 \int_0^{6-2y} \left( \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \left( \frac{6 - x - 2y}{3} \right) \right) \, dx \, dy \\ &= 10. \end{aligned}$$

Totalfluks er så gitt ved  $\Phi = \Phi_{y=0} + \Phi_{\Pi} = 10 - 4 = 6$ .

- 6] [https://wiki.math.ntnu.no/\\_media/tma4105/eksamen/lf\\_tma4105\\_04v.pdf](https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/eksamen/lf_tma4105_04v.pdf)

- 7] [https://wiki.math.ntnu.no/\\_media/tma4105/eksamen/lf\\_tma4105\\_09k.pdf](https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/eksamen/lf_tma4105_09k.pdf)